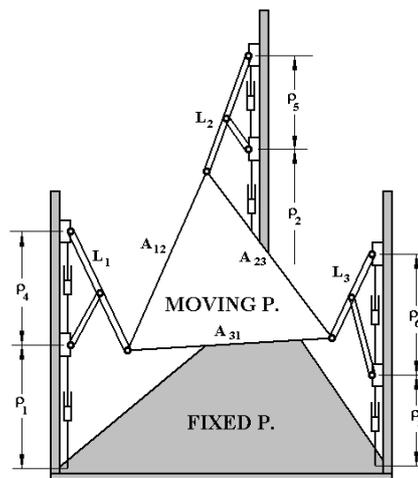


SÍNTESIS
DE
MECANISMOS Y MÁQUINAS
2010



I. ZABALZA VILLAVA

INDICE

CAPÍTULO I – SÍNTESIS DE LEVAS.....	1
I.1 – INTRODUCCIÓN.....	1
I.2 – CLASIFICACIÓN DE LAS LEVAS.....	1
I.3 – DIAGRAMA DE DESPLAZAMIENTO.....	3
I.4 – DERIVADAS DEL DIAGRAMA DE DESPLAZAMIENTO.....	5
I.5 – MOVIMIENTOS ESTÁNDAR DE LAS LEVAS.....	6
I.6 – DISEÑO GRÁFICO DE PERFILES DE LEVAS.....	11
I.7 – FUERZAS EN LEVAS.....	13
CAPÍTULO II – SÍNTESIS DE ENGRANAJES.....	17
II.1 – INTRODUCCIÓN.....	17
II.2 – CLASIFICACIÓN DE LOS ENGRANAJES.....	17
II.2.1 – Engranajes cilíndricos.....	18
II.2.2 – Engranajes cónicos.....	20
II.2.3 – Engranajes hiperbólicos.....	22
II.2.3.1 – Engranajes tornillo sinfin y corona.....	23
II.3 – TEORÍA DE ENGRANE.....	25
II.3.1 – Engranajes cilíndricos rectos exteriores.....	25
II.3.2 – Ley de engrane.....	26
II.3.3 – Tamaño del diente: Paso y módulo.....	29
II.3.4 – Línea de engrane.....	32
II.3.5 – Línea de acción o empuje y ángulo de presión.....	33
II.3.6 – Zona de engrane.....	33
II.3.7 – Dimensiones de un engranaje normal.....	35
II.3.8 – Dimensiones de un engranaje de diente corto.....	37
II.3.9 – Perfil del diente: Cicloidal y evolvente.....	37
II.3.10 – Ecuaciones paramétricas de la evolvente.....	39
II.3.11 – Datos intrínsecos de una rueda con perfil de evolvente.....	44
II.3.12 – Engrane entre perfiles de evolvente.....	46
II.3.13 – Engrane de dos ruedas con perfil de evolvente.....	48
II.3.14 – Datos de funcionamiento de una rueda de perfil de evolvente.....	49
II.3.15 – Engrane de dos ruedas dentadas sin holgura.....	52
II.3.16 – Cremallera de envolvente.....	53
II.3.17 – Engrane de rueda dentada y cremallera.....	55
II.3.18 – Engranaje cilíndrico recto interior.....	55
II.4 – LIMITACIONES EN EL ENGRANE DE PERFILES DE EVOLVENTE.....	57
II.4.1 – Coeficiente de recubrimiento.....	57
II.4.1.1 – Coeficiente de recubrimiento de dos ruedas.....	57
II.4.1.2 – Coeficiente de recubrimiento de rueda y cremallera.....	59
II.4.2 – Interferencia y socavación.....	59
II.4.2.1 – Zona activa del perfil del diente.....	59
II.4.2.2 – Interferencia y socavación.....	60
II.4.2.3 – Radio de apuntamiento.....	65

Índice

II.5 – TALLADO DE RUEDAS DENTADAS.....	67
II.5.1 – Tallado con fresa de forma.....	67
II.5.2 – Tallado por generación.....	68
II.5.2.1 – Cremallera herramienta.....	70
II.5.2.2 – Sincronización de los movimientos de la rueda y la herramienta.....	71
II.5.2.3 – Parámetros de generación.....	72
II.5.3 – Cálculo de datos intrínsecos.....	73
II.5.4 – Cálculo de datos de funcionamiento.....	76
II.5.4.1 – Engrane de dos ruedas sin holgura.....	77
II.5.4.2 – Datos de funcionamiento sin holgura.....	77
II.5.4.3 – Datos de funcionamiento sin holgura y engrane a cero.....	78
II.5.4.4 – Datos de funcionamiento con holgura.....	79
II.5.5 – Diente socavado en la generación.....	79
II.5.5.1 – Número de dientes mínimo para que no aparezca socavación.....	80
II.5.6 – Fuerzas en los engranajes rectos.....	81
II.6 – ENGRANAJES HELICOIDALES.....	83
II.6.1 – Forma de los dientes.....	83
II.6.2 – Engrane de dos ruedas helicoidales.....	85
II.6.3 – Relación entre ángulos de las hélices base y primitiva.....	86
II.6.5 – Cremallera helicoidal.....	87
II.6.6 – Relación entre perfil tangencial y perfil normal.....	88
II.6.7 – Coeficiente de recubrimiento.....	89
II.6.8 – Generación de ruedas helicoidales por cremallera.....	90
II.6.9 – Dimensiones de una rueda helicoidal.....	92
II.6.10 – Fuerzas en engranajes helicoidales.....	93
II.7 – ENGRANAJES CONICOS.....	97
II.7.1 – Movimiento esférico.....	99
II.7.2 – Evolvente esférica.....	100
II.7.3 – Ruedas cónicas de dientes piramidales.....	101
II.7.4 – Cono complementario. Rueda cilíndrica equivalente.....	103
II.7.5 – Dimensiones de engranajes cónicos.....	104
II.7.6 – Fuerzas en los engranajes cónicos.....	105
II.8 – ENGRANAJES DE TORNILLO SINFIN.....	107
II.8.1 – Tornillo sinfin y corona glóbcicos.....	109
II.8.2 – Mecanizado de coronas y tornillos sinfin.....	110
II.8.3 – Dimensiones de un engranaje de tornillo sinfin.....	112
II.8.4 – Fuerzas en un engranaje de tornillo sinfin.....	113

CAPÍTULO III – SÍNTESIS DE MECANISMOS DE FRICCIÓN Y ADHERENCIA.....

III.1 – ROZAMIENTO EN PLANO HORIZONTAL.....	115
III.2 – ROZAMIENTO EN PLANO INCLINADO.....	118
III.2.1 – Plano inclinado con ángulo respecto de la horizontal $\theta < \theta_s$	119
III.2.2 – Plano inclinado con ángulo respecto de la horizontal $\theta = \theta_s$	120
III.2.3 – Plano inclinado con ángulo respecto de la horizontal $\theta > \theta_s$	121

III.3 – CUÑAS.....	123
III.4 – ROSCAS.....	126
III.5 – COJINETES DE SUSTENTACIÓN.....	129
III.6 – COJINETES DE EMPUJE.....	130
III.6.1 – Cojinete de empuje a presión constante.....	131
III.6.2 – Cojinete de empuje a desgaste constante.....	132
III.7 – FRENOS Y EMBRAGUES DE DISCO.....	134
III.7.1 – Frenos y embragues de disco a presión constante.....	135
III.7.2 – Frenos y embragues de disco a desgaste constante.....	135
III.8 – FRENOS Y EMBRAGUES CÓNICOS.....	135
III.8.1 – Frenos y embragues cónicos a presión constante.....	137
III.8.2 – Frenos y embragues cónicos a desgaste constante.....	138
III.9 – FRENOS Y EMBRAGUES CENTRÍFUGOS.....	139
III.10 – FRENOS Y EMBRAGUES RADIALES DE ACCIONAMIENTO NEUMÁTICO.....	141
III.11 – LIMITADORES DE PAR.....	143
III.12 – TRANSMISIONES POR CORREAS.....	145
III.12.1 – Correas planas.....	146
III.12.2 – Correas trapeciales.....	148
III.13 – FRENOS DE CINTA.....	151
III.14 – FRENOS Y EMBRAGUES DE ZAPATAS.....	152
III.14.1 – Zapata lineal.....	152
III.14.2 – Frenos y embragues de tambor con zapatas interiores.....	153
CAPÍTULO IV – SÍNTESIS DE TRANSMISIONES.....	159
IV.1 – TRANSMISIONES ENTRE EJES ALINEADOS.....	159
IV.1.1 – Elementos de unión rígidos.....	159
IV.1.2 – Elementos de unión flexibles.....	160
IV.2 – TRANSMISIONES ENTRE EJES QUE SE CORTAN FORMANDO UN ÁNGULO.....	163
IV.3 – TRANSMISIONES ENTRE EJES PARALELOS RELATIVAMENTE PRÓXIMOS.....	165
IV.4 – TRANSMISIONES ENTRE EJES PARALELOS RELATIVAMENTE ALEJADOS.....	165
CAPÍTULO V – SÍNTESIS DE MECANISMOS DE GIRO INTERMITENTE.....	167
V.1 – UNIDADES DE GIRO INTERMITENTE.....	167
V.2 – CRUZ DE MALTA.....	168
V.3 – ENGRANAJES DE LINTERNA.....	169
V.4 – MECANISMOS DE TRINQUETE.....	170
CAPÍTULO VI – SÍNTESIS DE MECANISMOS.....	173
VI.1 – TIPOS DE SÍNTESIS.....	173
VI.1.1 – Síntesis de tipo.....	173
VI.1.2 – Síntesis de número.....	174
VI.1.3 – Síntesis dimensional.....	174

Índice

VI.1.4 – Síntesis estructural.....	174
VI.2 – OTROS TIPOS DE SÍNTESIS.....	174
VI.3 – EJEMPLOS DE SÍNTESIS ESTRUCTURAL.....	175
VI.4 – DIRECCIÓN ACKERMANN.....	176
VI.5 – SUSPENSIÓN MACPHERSON.....	178
CAPÍTULO VII – DINÁMICA DE MÁQUINAS.....	179
VII.1 – VOLANTE.....	179
VII.2 – GIROSCOPIO.....	182
VII.2.1 – Efecto giroscópico.....	183
VII.3 – REGULADOR DE WATT.....	184

CAPÍTULO I - SÍNTESIS DE LEVAS

I.1 - INTRODUCCIÓN

Las levas son unos mecanismos compuestos generalmente por un eslabón impulsor llamado "leva" y otro eslabón de salida llamado "seguidor" entre los que se transmite el movimiento por contacto directo.

Son mecanismos sencillos, poco costosos, tienen pocas piezas móviles y ocupan espacios reducidos. Además su principal ventaja reside en que se pueden diseñar de forma que se obtenga casi cualquier movimiento deseado del seguidor.

I.2 - CLASIFICACIÓN DE LAS LEVAS

Los mecanismos de leva se pueden clasificar teniendo en cuenta como son la "leva" y el "seguidor".

Teniendo en cuenta la leva, (Fig. I-1):

- a) Leva de placa, llamada también de disco o radial.
- b) Leva de cuña.
- c) Leva cilíndrica o de tambor.
- d) Leva lateral o de cara.

Teniendo en cuenta el seguidor, (Fig. I-2):

- a) Seguidor de cuña.
- b) Seguidor de cara plana.
- c) Seguidor de rodillo.
- d) Seguidor de cara esférica o zapata curva.

Otra clasificación de las levas se puede hacer teniendo en cuenta el movimiento del seguidor, pudiendo ser éste rectilíneo alternativo (traslación) u

oscilante (rotación). Teniendo en cuenta la posición relativa entre el seguidor y la leva, pueden ser de seguidor centrado, cuando el eje del seguidor pasa por el centro de la leva o de seguidor descentrado.

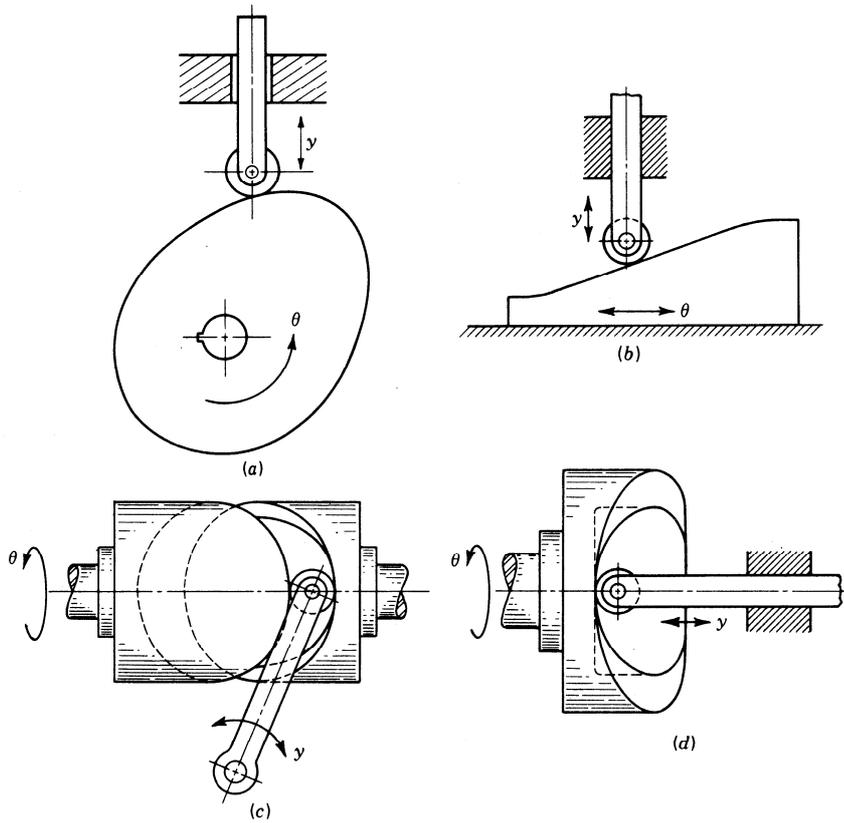


Fig. I-1 Tipos de levas: a) de placa, b) de cuña, c) de tambor y d) de cara.

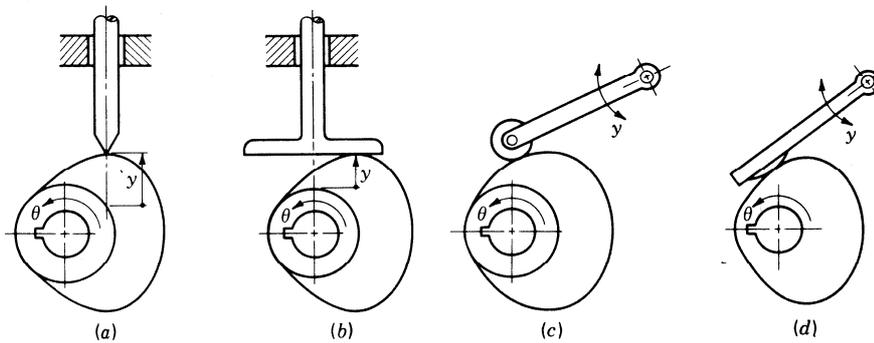


Fig. I-2 Tipos de seguidor: a) de cuña, b) de cara plana, c) de rodillo y d) de zapata.

El tipo de leva más común es el formado por una leva de placa y un seguidor de rodillo con movimiento rectilíneo alternativo.

I.3 - DIAGRAMA DE DESPLAZAMIENTO

El diagrama de desplazamiento " $y = f(\theta)$ " (Fig. I-3) representa, en el caso más general, la posición del seguidor respecto de la posición de la leva. Por ejemplo en una leva de placa con seguidor de movimiento rectilíneo alternativo, representaría la posición del seguidor respecto del ángulo girado por la leva, pero en otros casos, tanto " y " como " θ ", pueden ser desplazamientos lineales o angulares.

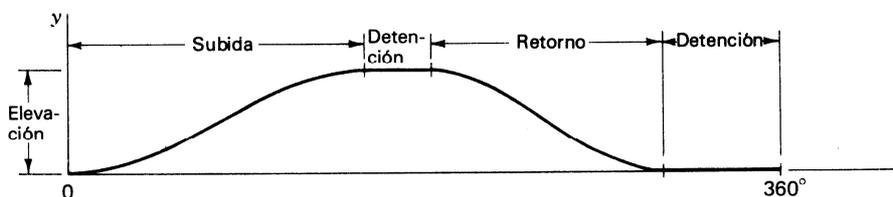


Fig. I-3 Diagrama de desplazamiento.

Un movimiento muy típico a conseguir por medio de un mecanismo de leva es el movimiento uniforme en el cual la velocidad del seguidor será constante siempre que sea constante la velocidad de la leva, (quizás sería mejor llamarlo movimiento proporcional). Este tipo de movimiento queda reflejado en el diagrama de desplazamiento por medio de un segmento rectilíneo.

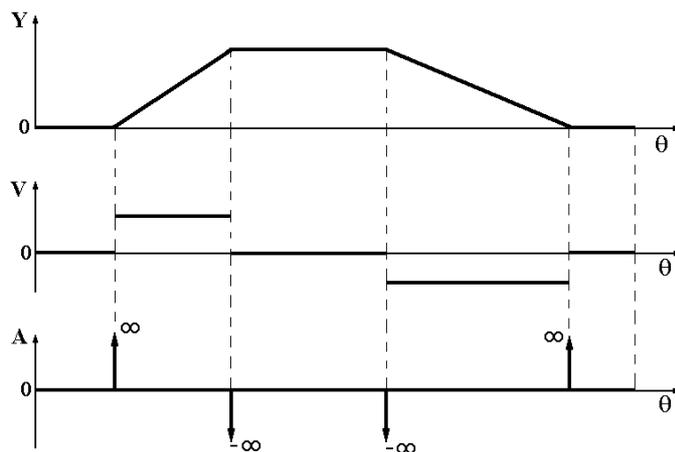


Fig. I-4 Desplazamientos, velocidades y aceleraciones del seguidor

Si se tuviese una leva con la que se pretende, por ejemplo, realizar: una subida con movimiento uniforme, una detención y finalmente un retorno, y no se tomase ningún tipo de precaución resultaría que podrían aparecer aceleraciones del seguidor tendiendo a infinito, tal como se ve en la figura I-4.

Si la aceleración del seguidor tiende a infinito, también lo harán las fuerzas de inercia, con lo que llegarían a romperse las piezas que componen la leva. Como esto es inadmisibles, se debe prever un diagrama de desplazamiento que no produzca discontinuidades en el diagrama de velocidades.

Para suavizar el inicio o final de un movimiento uniforme se suele utilizar una rama de parábola, consiguiendo que las pendientes de los tramos de parábola coincidan con la pendiente del movimiento uniforme. (Fig. I-5).

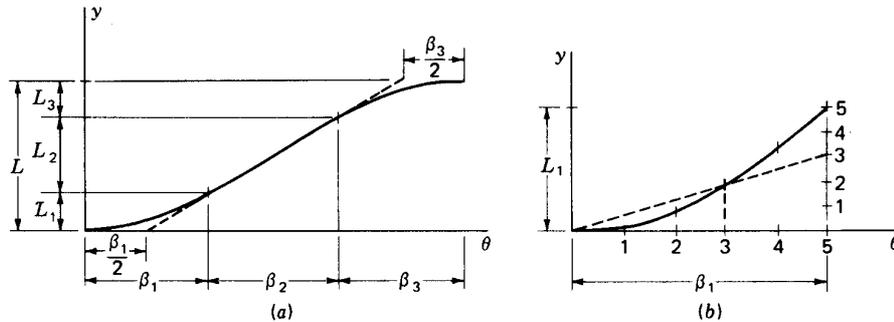


Fig. I-5 Tramos de parábola. a) Unión de movimiento uniforme y b) dibujo del tramo.

Cuando se desea realizar un desplazamiento del seguidor de subida y bajada sin detenciones, un movimiento muy adecuado es el armónico (Fig. I-6), ya que este tipo de movimiento tiene velocidades y aceleraciones que son funciones continuas.

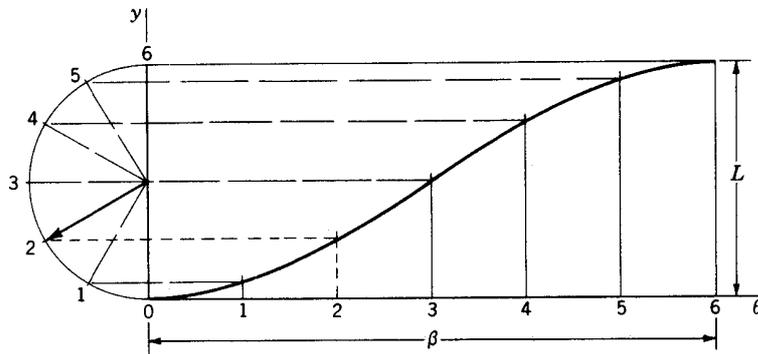


Fig. I-6 Diagrama de desplazamiento con movimiento armónico

Si se desea que el seguidor realice unos desplazamientos de subida y bajada entre detenciones, un movimiento adecuado es el cicloidal (Fig. I-7), puesto que este movimiento tiene aceleraciones nulas al inicio y al final, correspondiéndose con las aceleraciones nulas de las detenciones.

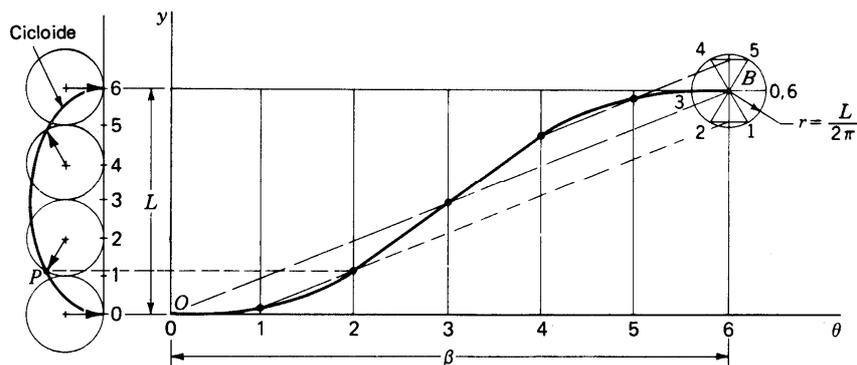


Fig. I-7 Diagrama de desplazamiento con movimiento cicloidal

Cuando se precisen otros tipos de movimientos se ajustarán por medio de curvas estándar, que se verán más adelante.

I.4 - DERIVADAS DEL DIAGRAMA DE DESPLAZAMIENTO

En una leva de placa con seguidor de movimiento rectilíneo alternativo, que es la más común, el diagrama de desplazamiento, ecuación (I-1), representa la posición del seguidor en función del ángulo girado por la leva.

$$y = f(\theta) \tag{I-1}$$

El diagrama de desplazamiento (I-1) se puede derivar respecto de " θ " y respecto de " t ".

Derivando (I-1) respecto de " θ " se tendrá:

$$y' = \frac{dy}{d\theta} \tag{I-2}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{d\theta^2} \tag{I-3}$$

Estas derivadas dependen solamente del perfil de la leva y son independientes de la velocidad de giro de la leva. La primera derivada (y') representa la pendiente del diagrama de desplazamiento y sus unidades serían, por ejemplo, milímetros / radian. La (y'') representa la pendiente de la (y') y sus unidades serían, por ejemplo, milímetros / radián².

Derivando (I-1) respecto de "t" se tendrá:

$$V = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad (I-4)$$

$$A = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (I-5)$$

Las derivadas primera y segunda del diagrama de desplazamiento respecto de "t" representan la velocidad y aceleración del seguidor respectivamente.

Entre las derivadas de (I-1) respecto de " θ " y respecto de "t" existen las siguientes relaciones:

$$V = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot y' \quad (I-6)$$

$$\begin{aligned} A = \ddot{y} &= \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \omega^2 \cdot y'' + \alpha \cdot y' \end{aligned} \quad (I-7)$$

Si la leva girase con velocidad constante, movimiento que es muy común en las máquinas, la aceleración sería:

$$A = \omega^2 \cdot y'' \quad (I-8)$$

I.5 - MOVIMIENTOS ESTÁNDAR DE LAS LEVAS

Para conseguir cualquier tipo de movimiento en el seguidor, no siempre resultará suficiente con los movimientos que se han visto en el apartado

anterior, por ello, hay toda una serie de curvas estándar por medio de las cuales resultará más sencillo enlazar los movimientos deseados de forma que resulten funciones continuas tanto el diagrama de desplazamiento como sus dos primeras derivadas.

Este tipo de curvas están basados en curvas armónicas y cicloidales y son las que se acompañan a continuación, primero las de subida completa.

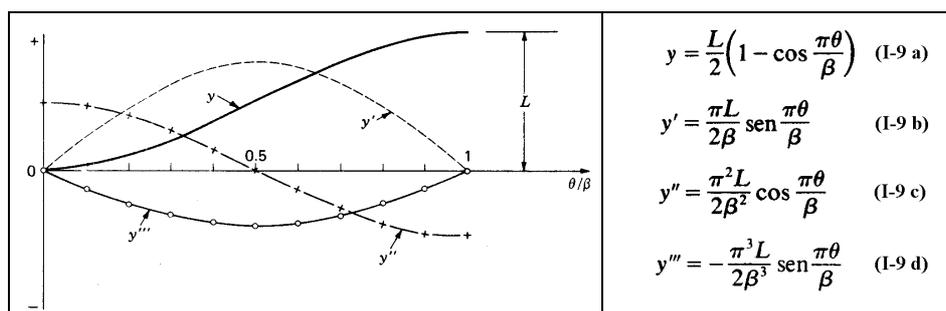


Fig. I-9 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento armónico simple de subida completa, ecuación (I-9).

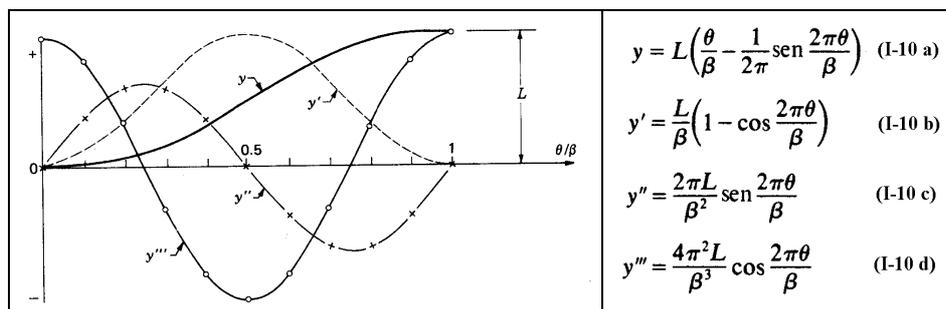


Fig. I-10 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento cicloidal de subida completa, ecuación (I-10).

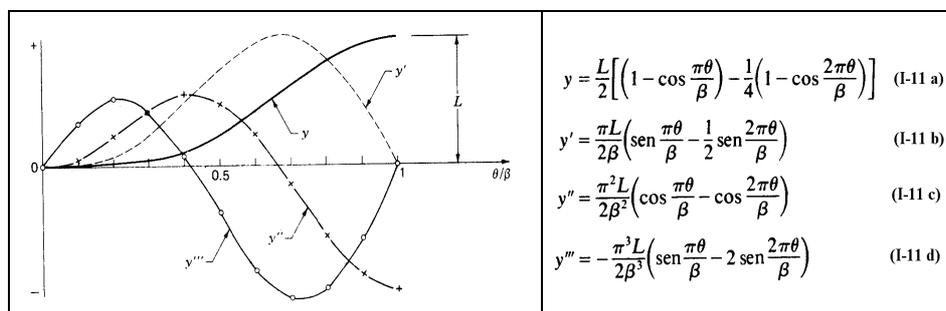


Fig. I-11 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento armónico modificado de subida completa, ecuación (I-11).

A continuación las tres curvas estándar de retorno completo.

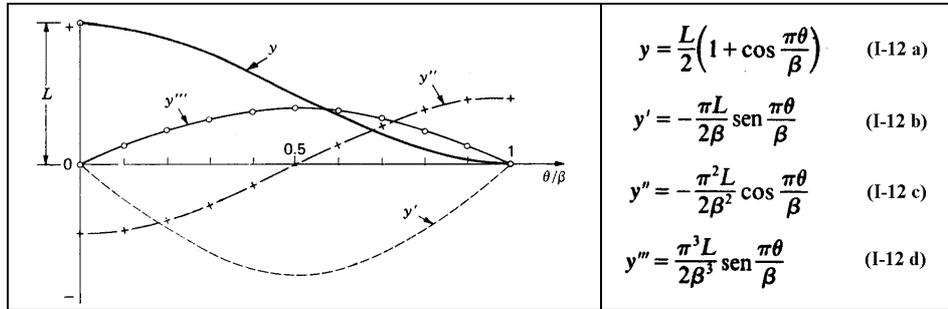


Fig. I-12 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento armónico simple de retorno completo, ecuación (I-12).

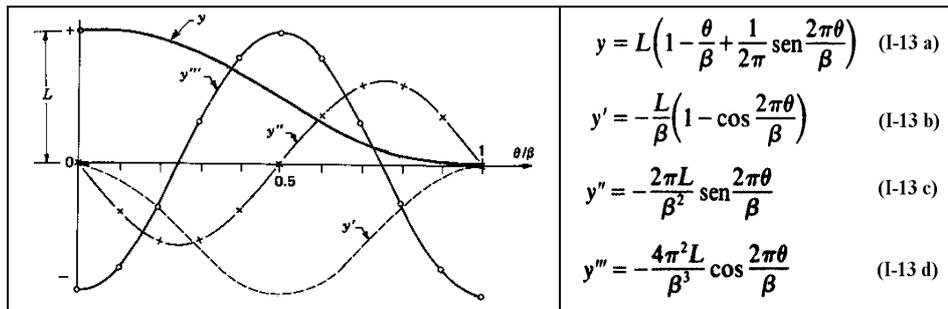


Fig. I-13 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento cicloidal de retorno completo, ecuación (I-13).

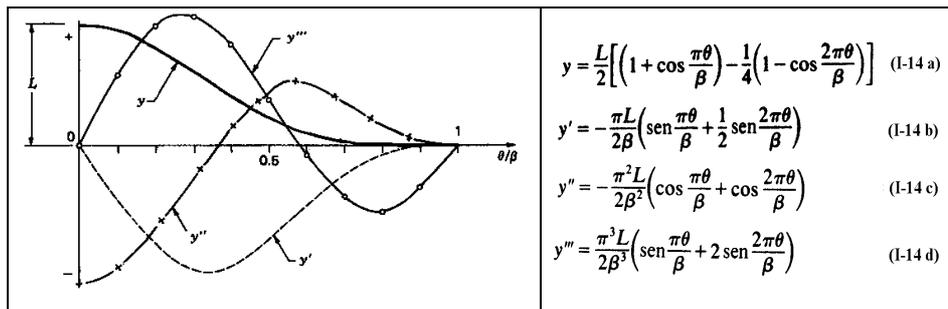


Fig. I-14 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento armónico modificado de retorno completo, ecuación (I-14).

Cuando no se tiene que realizar una subida o bajada completa, por ejemplo desde una detención hasta un tramo de movimiento uniforme, se utilizan trozos de movimiento armónico o cicloidal, tanto de subida como de bajada y son los que se exponen a continuación.

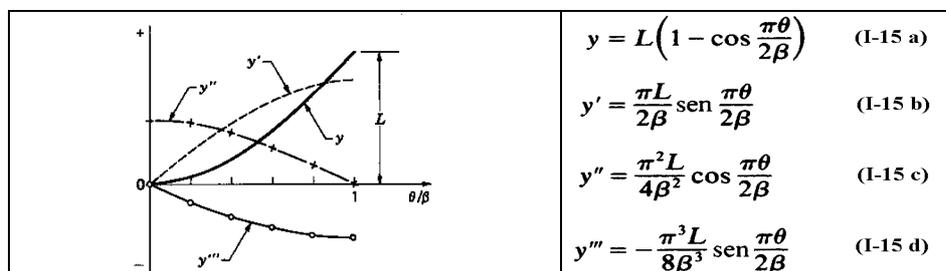


Fig. I-15 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semiarmónico de subida, parte baja, ecuación (I-15).

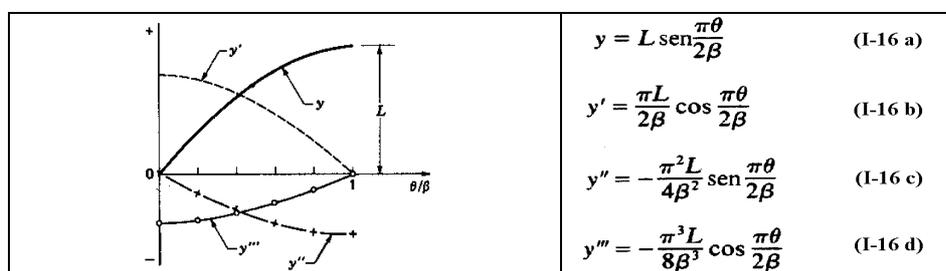


Fig. I-16 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semiarmónico de subida, parte alta, ecuación (I-16).

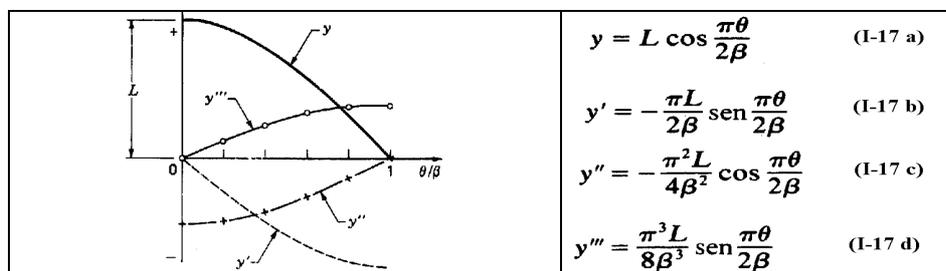


Fig. I-17 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semiarmónico de retorno, parte alta, ecuación (I-17).

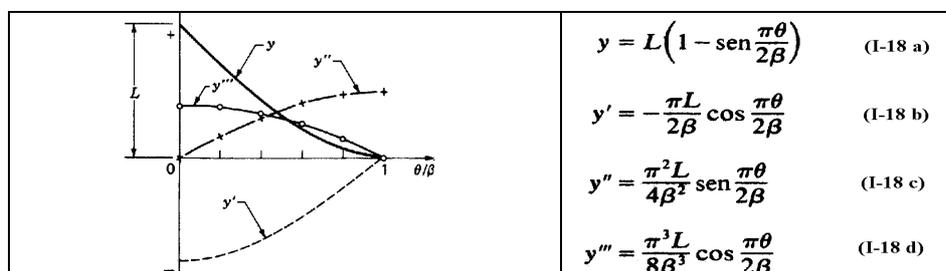


Fig. I-18 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semiarmónico de retorno, parte baja, ecuación (I-18).

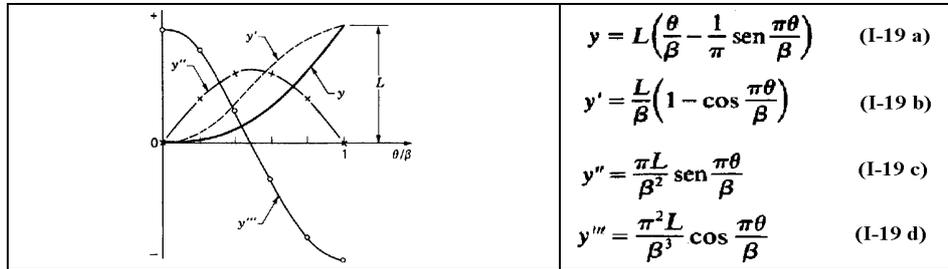


Fig. I-19 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semicicloidal de subida, parte baja, ecuación (I-19).

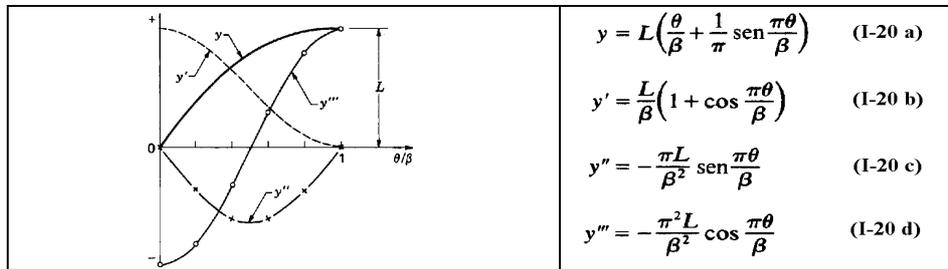


Fig. I-20 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semicicloidal de subida, parte alta, ecuación (I-20).

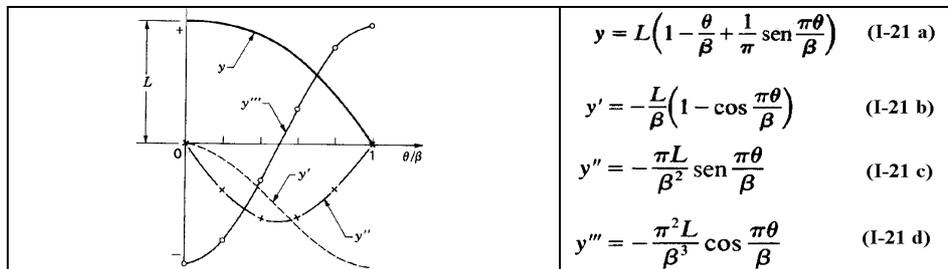


Fig. I-21 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semicicloidal de bajada, parte alta, ecuación (I-21).

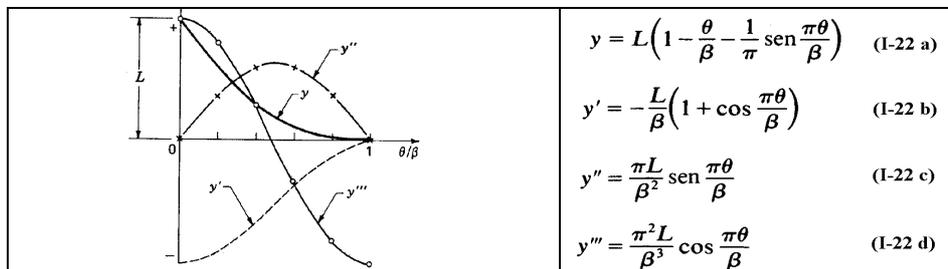


Fig. I-22 Diagrama de desplazamiento y derivadas para el movimiento semicicloidal de bajada, parte baja, ecuación (I-22).

Una vez escogidos los movimientos estándar más apropiados para cada tramo, se debe intentar conseguir que tanto el diagrama de desplazamiento como las velocidades y aceleraciones sean funciones continuas, para conseguirlo se pueden variar la elevación y la amplitud de los movimientos estándar.

La continuidad es imprescindible en los diagramas de desplazamiento y de velocidades cuando son levas que giran a gran velocidad, aunque es recomendable siempre.

I.6 - DISEÑO GRÁFICO DE PERFILES DE LEVAS

Una vez establecido como debe ser el diagrama de desplazamiento, se debe dibujar el perfil de la leva que haga que se cumpla el diagrama previsto. El perfil de la leva será diferente en función del seguidor sobre el que actúe.

Para dibujar el perfil de la leva se inicia dibujando el seguidor en la posición correspondiente al punto "0" del diagrama de desplazamiento. Se realiza una inversión cinemática haciendo girar el seguidor en sentido contrario al del giro de la leva y dibujándolo en varias posiciones de acuerdo con el diagrama de desplazamiento. El perfil de la leva será la curva envuelta por las diferentes posiciones que alcance el seguidor.

Cuanto en mayor número de posiciones se dibuje el seguidor, mayor será la precisión del perfil de la leva.

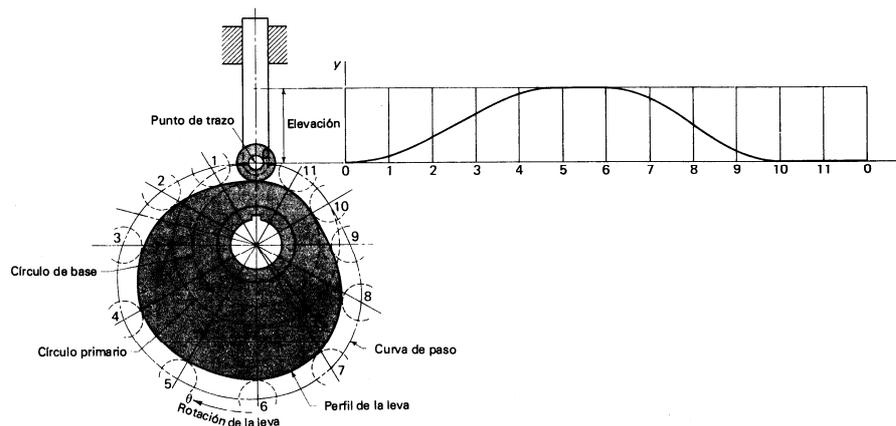


Fig. I-23 Diseño del perfil de una leva con seguidor de rodillo centrado. Superficie de la leva desarrollada manteniéndola estacionaria y haciendo girar al seguidor en sentido contrario al del giro de la leva.

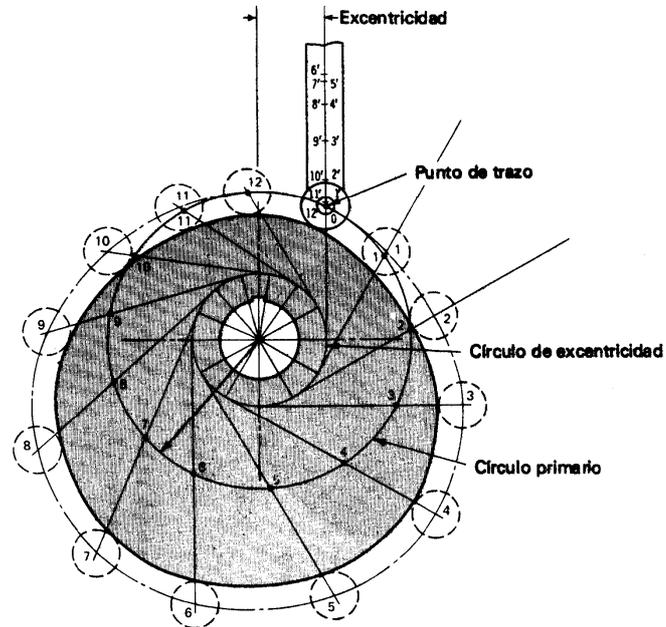


Fig. I-24 Trazado del perfil de una leva de placa con seguidor de rodillo descentrado

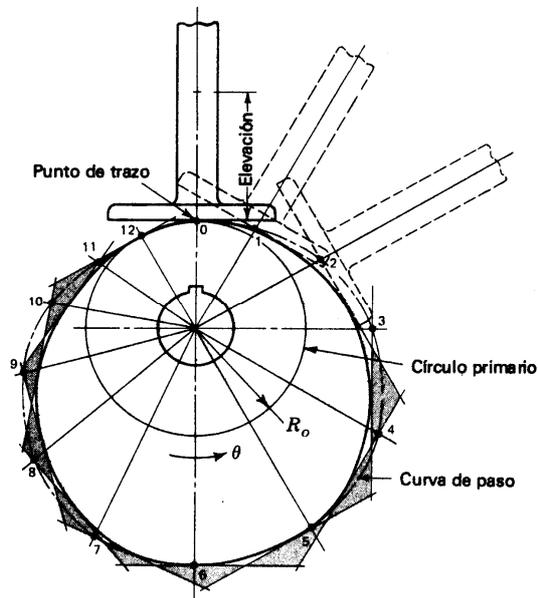


Fig. I-25 Trazado del perfil de una leva de placa con seguidor de cara plana

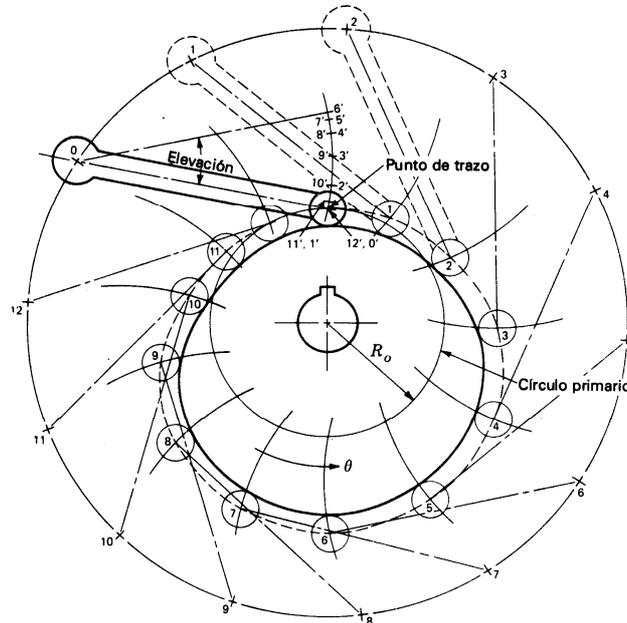


Fig. I-26 Trazado del perfil de una leva de placa con seguidor de rodillo oscilante

I.7 - FUERZAS EN LEVAS

En las levas se pueden considerar dos tipos de fuerzas:

- Estáticas, debidas a las fuerzas exteriores que actúan sobre el seguidor y a la fuerza del muelle.
- Dinámicas, debidas a la masa del seguidor.

Si no se toma ningún tipo de precaución, la fuerza entre el seguidor y la leva debe ser positiva, ya que sino se perdería el contacto entre ellos dejando de ser un mecanismo.

En la figura I-27 pueden verse las fuerzas estáticas en una leva de placa y seguidor de rodillo que es una de las levas más comunes.

En la figura I-28 se pueden observar las fuerzas dinámicas cuando la aceleración del seguidor es positiva.

Finalmente, en la figura I-29 se muestran las fuerzas dinámicas cuando la aceleración del seguidor es negativa.

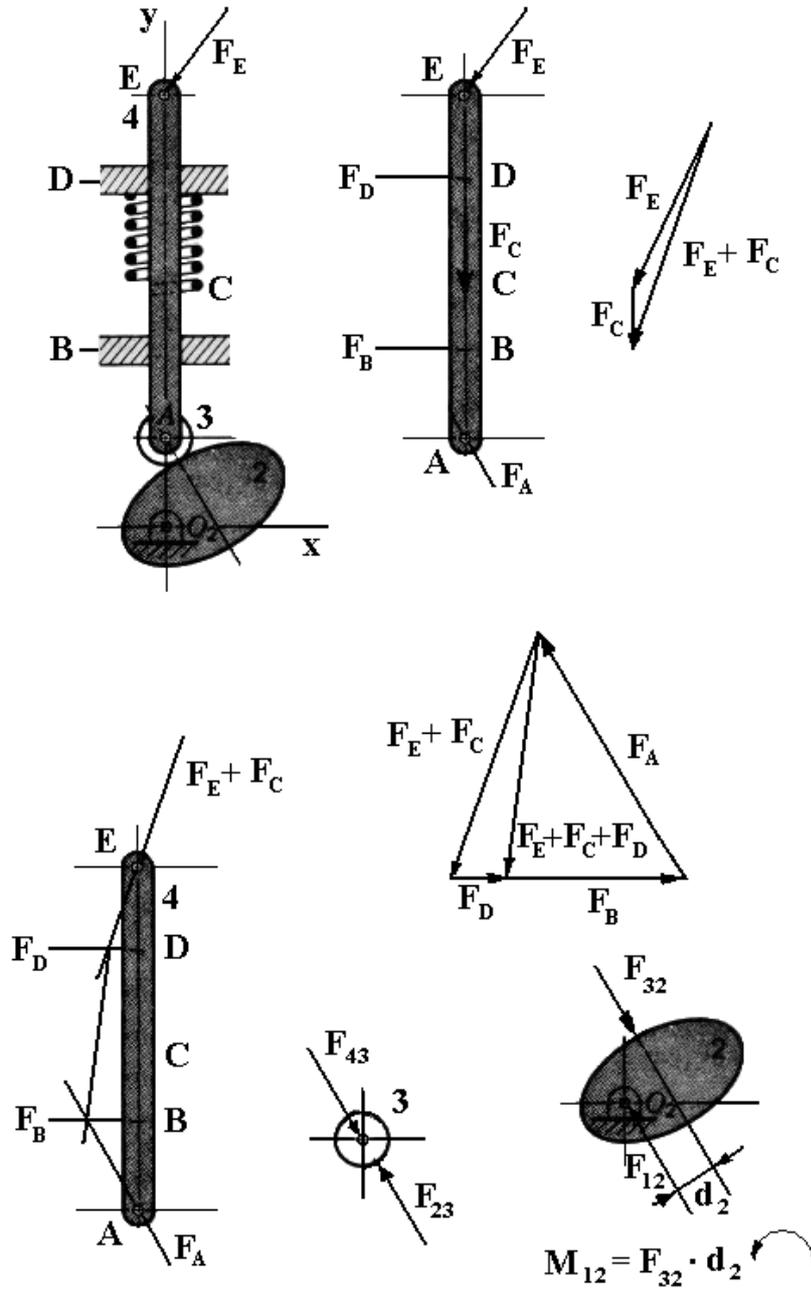


Fig. I-27 Fuerzas estáticas en una leva de placa y seguidor de rodillo

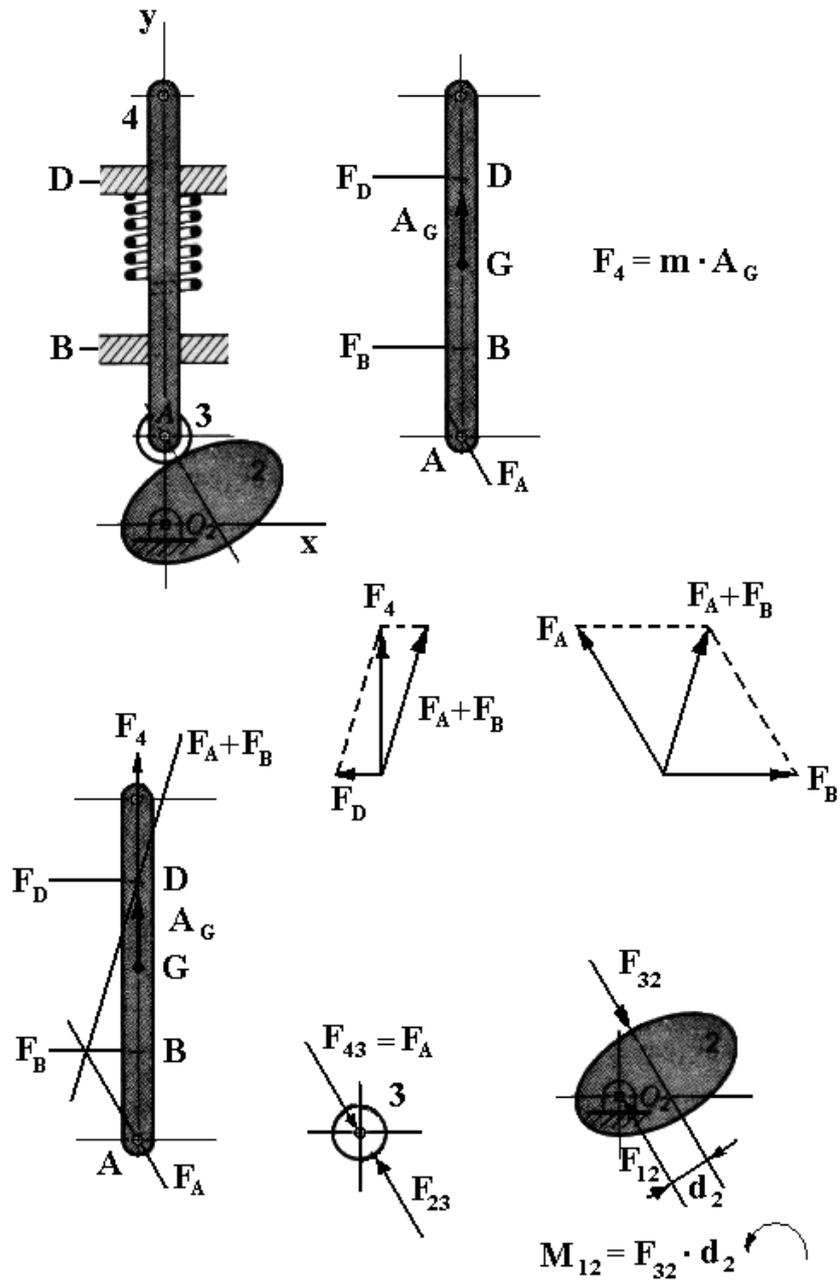


Fig. I-28 Fuerzas dinámicas en una leva de placa y seguidor de rodillo siendo la aceleración del seguidor positiva

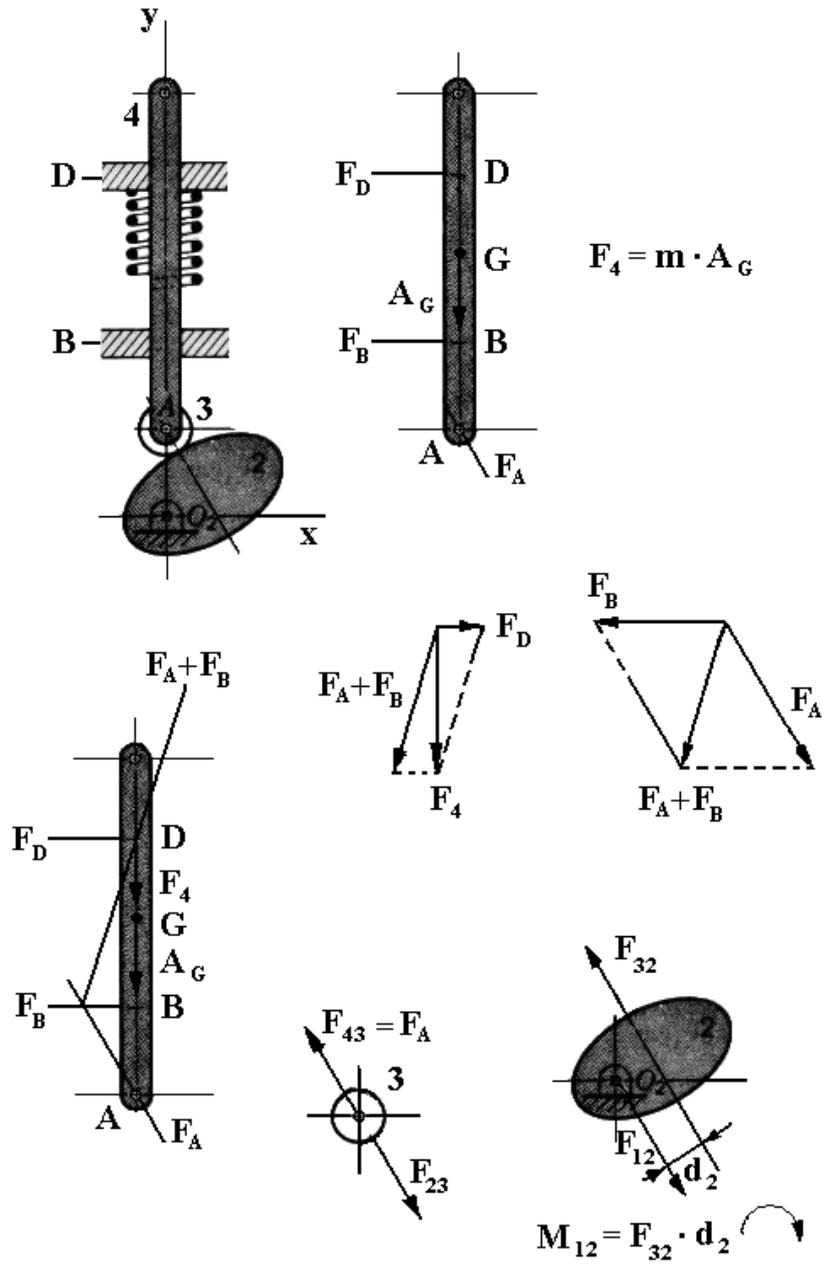


Fig. I-29 Fuerzas dinámicas en una leva de placa y seguidor de rodillo siendo la aceleración del seguidor negativa

CAPÍTULO II - SÍNTESIS DE ENGRANAJES

II.1 - INTRODUCCIÓN

Para transmitir movimiento entre dos ejes el mecanismo más sencillo es el formado por poleas de fricción. Estas poleas transmiten el movimiento por medio de la rodadura de una con otra.

Para transmitir una determinada potencia por medio de rodadura debe aparecer una fuerza tangencial a las poleas de fricción en el punto de contacto y para conseguir una fuerza tangencial, que será una fuerza de rozamiento, será necesaria una fuerza normal.

Teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento en unas poleas de fricción puede ser en algunos casos un valor tan bajo como 0.1, resulta que la fuerza normal deberá ser 10 veces superior a la fuerza tangencial necesaria.

Además con las poleas de fricción puede existir deslizamiento, con lo que la relación de transmisión no será exacta.

Para evitar estos problemas se utilizan los engranajes en los que se produce una transmisión de movimiento por contacto directo con deslizamiento, similar al de las levas. El diente de rueda dentada motora se puede considerar la leva y el diente de la rueda conducida el seguidor, lo que ocurre en los engranajes es que los dientes van entrando en contacto de forma sucesiva.

II.2 - CLASIFICACIÓN DE LOS ENGRANAJES

Los engranajes se pueden clasificar en función de la posición relativa de los ejes entre los que se transmite el movimiento, clasificándose en los tipos siguientes:

- Engranajes cilíndricos, cuando transmiten el movimiento entre ejes paralelos.
- Engranajes cónicos, transmiten el movimiento entre ejes que se cortan.
- Engranajes hiperbólicos, transmiten el movimiento entre ejes que se cruzan.

El nombre lo reciben de la forma geométrica de los axoides relativos a las ruedas dentadas que forman el engranaje. En los cilíndricos los axoides son cilindros, en los cónicos son conos y en los hiperbólicos, los axoides son hiperboloides de revolución.

II.2.1 - Engranajes cilíndricos

Los engranajes cilíndricos pueden ser:

- Exteriores, cuando las dos ruedas tienen dentado exterior (Fig. II-1).
- Interiores, cuando la rueda mayor tiene dentado interior (Fig. II-2).

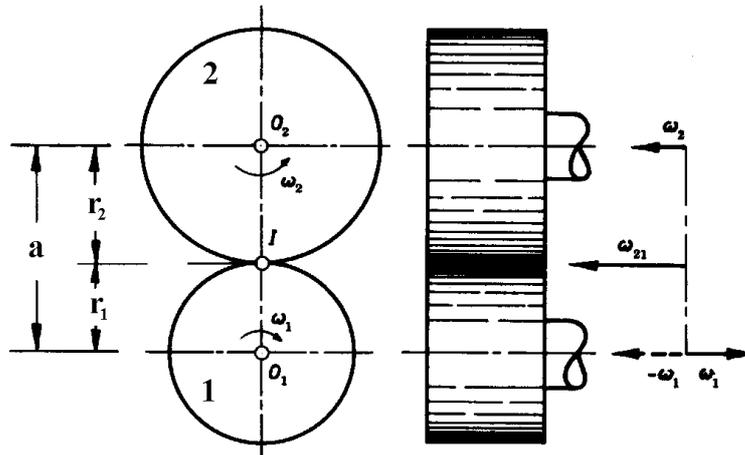


Fig. II-1 Engranaje cilíndrico exterior

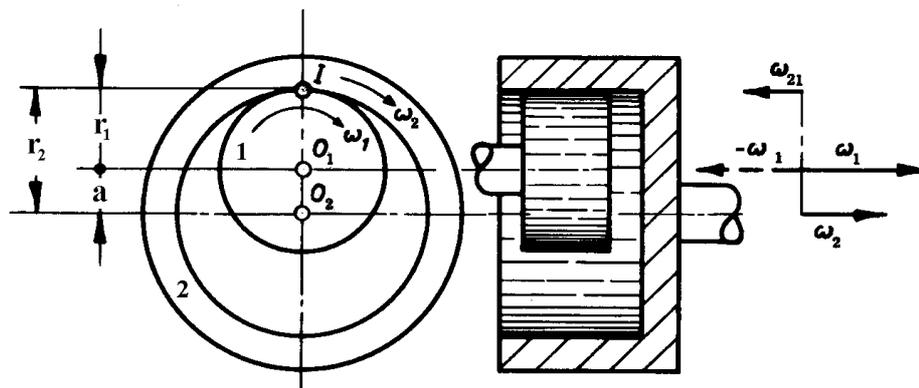


Fig. II-2 Engranaje cilíndrico interior

Otra clasificación de los engranajes cilíndricos, teniendo en cuenta la forma del diente, es la siguiente:

- Rectos, cuando los dientes son paralelos a las generatrices de los cilindros axoide (Fig. II-3).
- Helicoidales, cuando los dientes forman una hélice sobre el cilindro axoide. En este tipo de engranajes, el valor del ángulo de la hélice sobre el cilindro axoide debe ser el mismo en las dos ruedas, pero en una a derechas y otra a izquierdas (Fig. II-4).

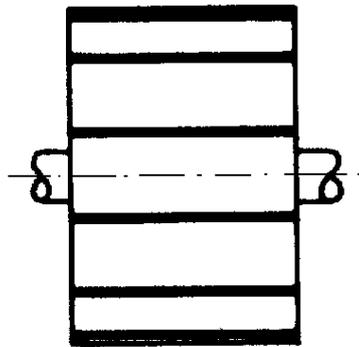


Fig. II-3 Rueda dentada cilíndrica recta

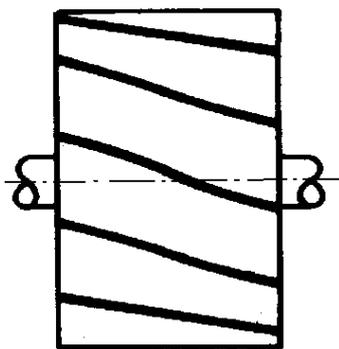


Fig. II-4 Rueda dentada cilíndrica helicoidal

II.2.2 - Engranajes cónicos

En los engranajes cónicos, el ángulo formado por los ejes puede ser:

- Menor de 90° (Fig. II-5).
- Igual a 90° (Fig. II-6).
- Mayor de 90° , siendo el axoide de la rueda mayor un plano (Fig. II-7).
- Mayor de 90° , con el axoide de la rueda mayor un cono interior (Fig. II-8).

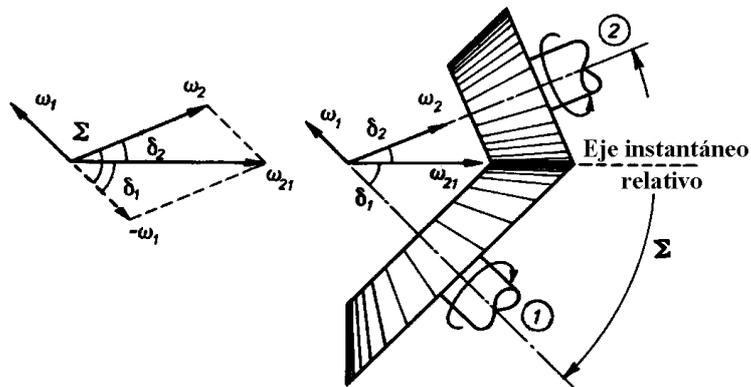


Fig. II-5 Engranaje cónico con ángulo entre ejes menor de 90°

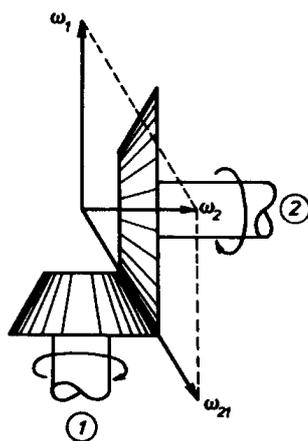


Fig. II-6 Engranaje cónico con ángulo entre ejes igual a 90°

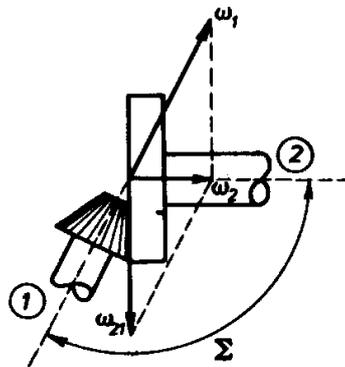


Fig. II-7 Engranaje cónico con ángulo entre ejes mayor de 90° y rueda grande plana

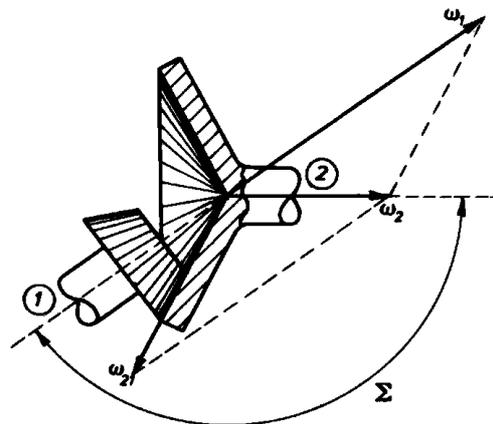


Fig. II-8 Engranaje cónico con ángulo entre ejes mayor de 90° y rueda grande cónica interior

De la clasificación de los engranajes cónicos se aprecia que éstos pueden abarcar toda la gama de ángulos entre ejes desde 0° hasta 180°, es decir, desde los engranajes cilíndricos exteriores hasta los cilíndricos interiores. Por lo tanto, los engranajes cilíndricos exteriores e interiores se pueden considerar los extremos de la gama posible de engranajes cónicos.

II.2.3 - Engranajes hiperbólicos

Los engranajes hiperbólicos más comunes son:

- Ruedas cilíndricas helicoidales montadas sobre ejes que se cruzan. En este caso, los ángulos de las hélices sobre los cilindros axoides pueden tomar cualquier valor e incluso pueden tener el mismo valor pero ser los dos a derechas o los dos a izquierdas (Fig. II-9).

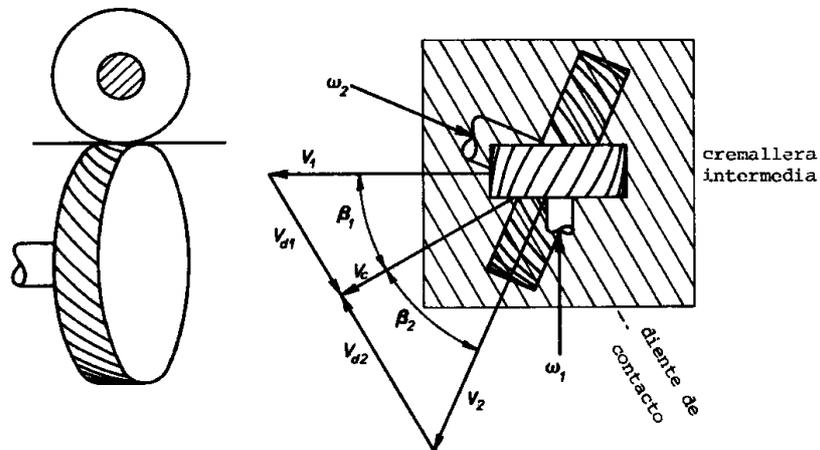


Fig. II-9 Engranaje helicoidal entre ejes que se cruzan

- Cuando una de las dos ruedas del párrafo anterior tiene pocos dientes (1, 2, 3 ó 4) se les llama tornillo sinfin y corona por la similitud de apariencia de la rueda de pocos dientes con un tornillo (Fig. II-10).

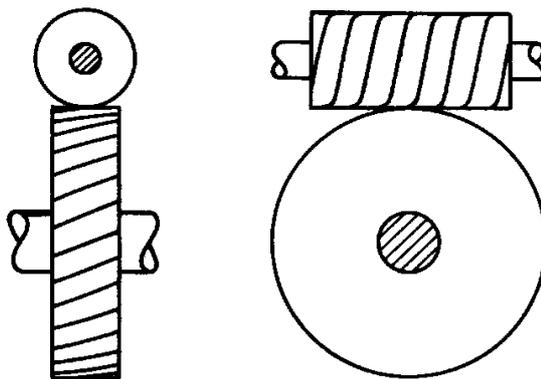


Fig. II-10 Tornillo sinfin y corona

- Engranajes hipoides, tienen la apariencia de ruedas cónicas, pero como sus ejes no se cortan, realmente son hiperbólicos (Fig. II-11).

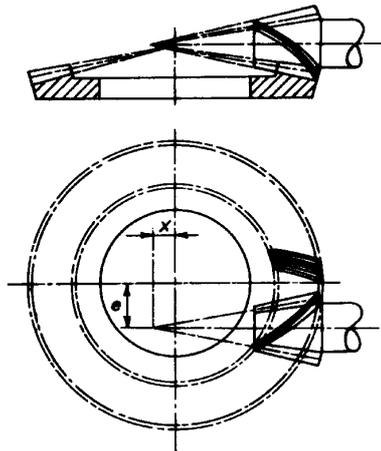


Fig. II-11 Engranaje hipoide

II.2.3.1 - Engranajes tornillo sinfín y corona

Los engranajes de tornillo sinfín y corona, atendiendo a la forma del tornillo y de la corona se pueden clasificar como:

- Tornillo sinfín y corona cilíndricos (Fig. II-10).
- Tornillo sinfín cilíndrico y corona glóbica (Fig. II-12).

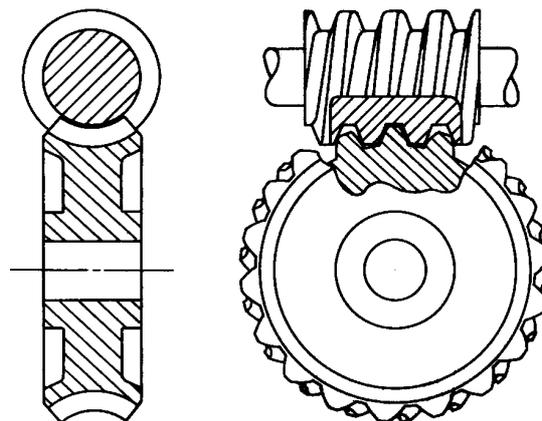


Fig. II-12 Tornillo sinfín cilíndrico y corona glóbica

- Tornillo sinfin glóbico y corona cilíndrica (Fig. II-13).
- Tornillo sinfin y corona glóbicos (Fig. II-14).

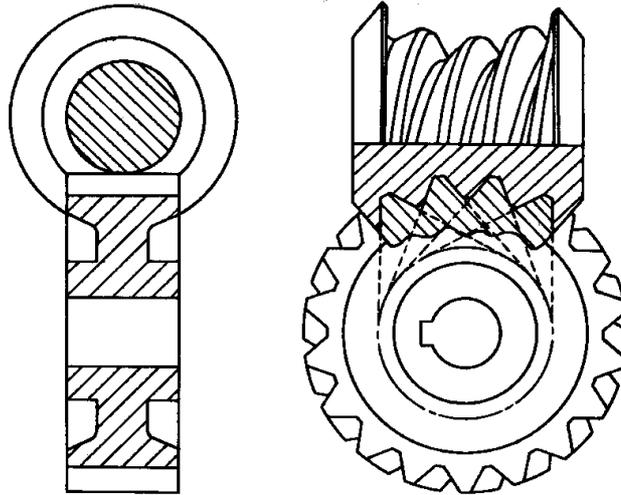


Fig. II-13 Tornillo sinfin glóbico y corona cilíndrica

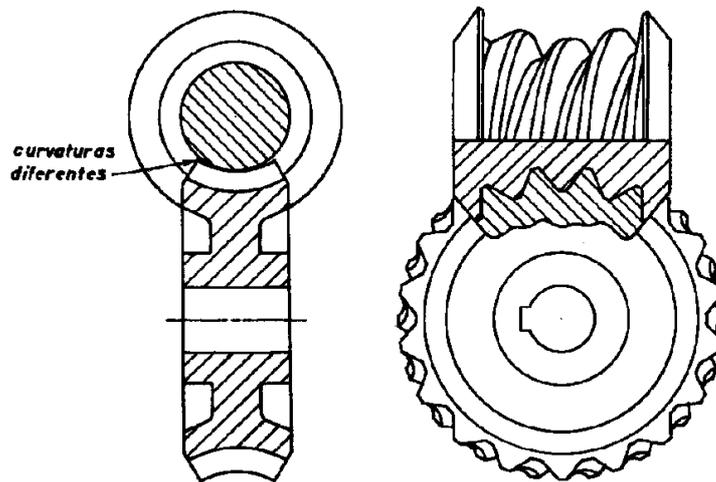


Fig. II-14 Tornillo sinfin glóbico y corona glóbica

II.3 - TEORÍA DE ENGRANE

II.3.1 - Engranajes cilíndricos rectos exteriores

Para estudiar la teoría de engrane, lo más sencillo es realizarla sobre los engranajes rectos exteriores, ya que al tener los dientes paralelos a las generatrices de los cilindros axoides, se pueden estudiar en el plano.

La transmisión de movimiento en un engranaje recto se realiza por medio de contacto directo con deslizamiento entre los dientes de las dos ruedas que forman el engranaje. Esta transmisión, si las ruedas están bien diseñadas, es equivalente a una rodadura sin deslizamiento entre dos poleas de fricción cuyos cilindros de rodadura coincidan con los cilindros axoides (Fig. II-15).

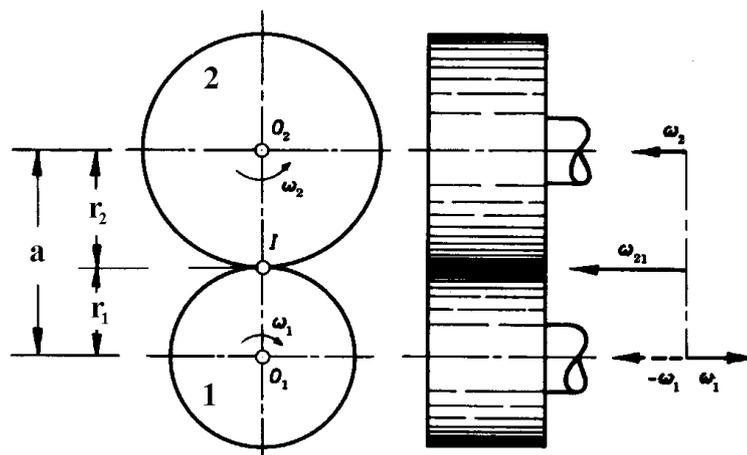


Fig. II-15 Axoides en un engranaje cilíndrico exterior

Como la velocidad del centro instantáneo de rotación "I" debe ser la misma para las dos ruedas se cumplirá la ecuación (II-1).

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \quad (\text{II-1})$$

De aquí se obtiene que la relación de transmisión será

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (\text{II-2})$$

Si se conoce la distancia entre centros de las ruedas "a" y la relación de transmisión " μ ", como la distancia entre centros debe ser igual a la suma de los radios de los axoides o radios primitivos, se cumplirá:

$$a = r_1 + r_2 \quad (\text{II-3})$$

$$r_1 = \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot a \quad (\text{II-4})$$

$$r_2 = \frac{1}{\mu + 1} \cdot a \quad (\text{II-5})$$

II.3.2 - Ley de engrane

La ley de engrane o condición de engrane dice que la relación de transmisión de un engranaje debe ser constante.

Suponiendo que la velocidad angular de una rueda dentada de un engranaje sea constante, para conseguir que la velocidad angular de la otra rueda sea constante y no aparezcan aceleraciones angulares que produzcan vibraciones, se debe conseguir en todo momento que la relación de transmisión sea constante. Es decir que se cumpla la ley de engrane.

En la ecuación (II-2) se observa que para que la relación de transmisión sea constante se deben mantener constantes los radios primitivos de las ruedas dentadas. Los axoides deben ser circunferencias.

Para que los radios primitivos se mantengan constantes, el centro instantáneo de rotación relativo a las dos ruedas, punto "I", se debe mantener fijo (Fig. II-16).

Según el teorema de los tres centros, si se tiene tres eslabones "0", "1" y "2", los centros relativos entre ellos están en línea recta, por lo tanto, el centro instantáneo "I" debe estar en la recta de unión de los centros de las ruedas. Por otro lado, cuando se tiene una transmisión de movimiento por contacto directo con deslizamiento, el centro instantáneo relativo a esos eslabones se encuentra en la perpendicular a la tangente común a las dos superficies en el punto de contacto.

Del párrafo anterior se desprende que cuando la perpendicular trazada en todo momento a la tangente de los perfiles de los dientes en el punto de contacto

corta a la recta de unión de centros en un punto fijo, se cumple la ley de engrane.

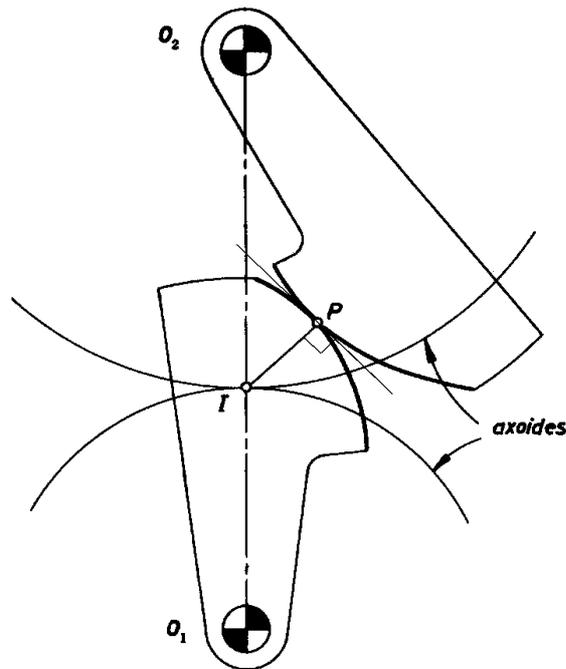


Fig. II-16 Ley de engrane, I debe ser fijo

A los perfiles que cumplen la ley de engrane se les llama perfiles conjugados. Para dibujar un perfil conjugado de otro dado se puede seguir los siguientes métodos:

- Por generación, fijando el perfil dado sobre una rueda cuyo radio sea su radio primitivo y haciéndola rodar sin deslizamiento sobre otra rueda fija cuyo radio sea su radio primitivo correspondiente. De este modo se cumple la ley de engrane, ya que las ruedas tienen radios primitivos constantes. El perfil dado generará sobre la otra rueda el perfil conjugado, (Fig. II-17).
- Por puntos, haciendo que cuando la perpendicular trazada por un punto al perfil dado pasa por el centro instantáneo de rotación, en ese momento ese sea el punto de contacto con el otro perfil, (Fig. II-18 y II-19).

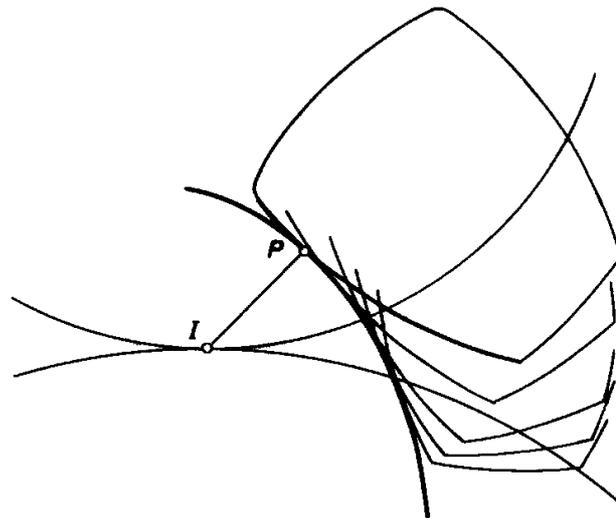


Fig. II-17 Trazado de perfil conjugado por generación

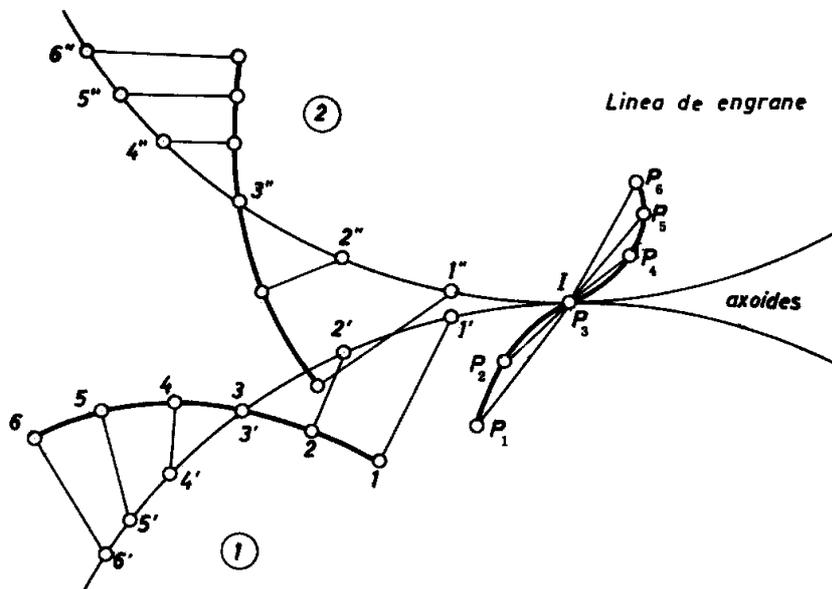


Fig. II-18 Trazado de perfil conjugado por puntos

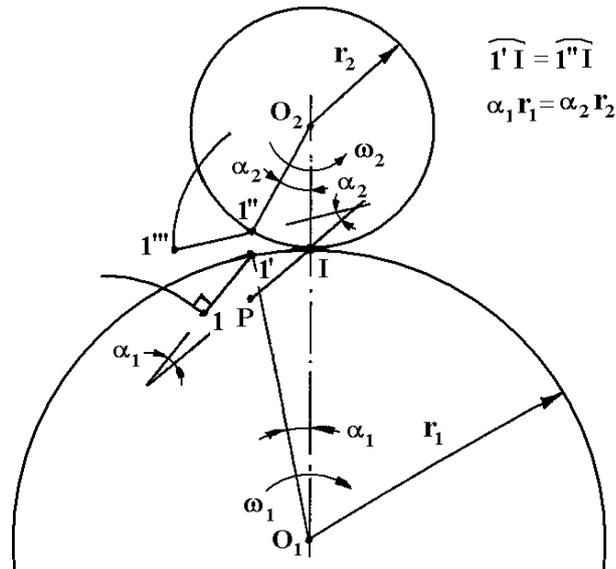


Fig. II-19 Trazado de un punto del perfil conjugado

II.3.3 - Tamaño del diente: Paso y módulo

El paso se define como la distancia entre flancos homólogos de dientes consecutivos medida sobre la circunferencia primitiva o axoide, por lo tanto su valor será:

$$p = \frac{2\pi r}{z} = \frac{\pi d}{z} \quad (\text{II-6})$$

Siendo "r" y "d" el radio y diámetro de la circunferencia primitiva respectivamente y "z" el número de dientes.

Con el fin de no manejar continuamente el número " π " se define el módulo como:

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{2r}{z} = \frac{d}{z} \quad (\text{II-7})$$

Para que dos ruedas dentadas puedan engranar correctamente además de cumplir la ley de engrane deben tener el mismo paso, o lo que es equivalente, el mismo módulo, por lo tanto se cumplirá:

$$m = \frac{2r_1}{z_1} = \frac{2r_2}{z_2} = \frac{d_1}{z_1} = \frac{d_2}{z_2} \quad (\text{II-8})$$

Y la relación de transmisión será:

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{d_1}{d_2} \quad (\text{II-9})$$

Con el fin de reducir el número de herramientas de tallado de ruedas dentadas se han normalizado los módulos según se puede ver en la tabla (II-1), aunque se pueden encontrar ruedas dentadas con módulos no normalizados.

MÓDULOS NORMALES (mm)					
(0.875)	<u>1</u>	(1.125)	<u>1.25</u>	(1.375)	<u>1.5</u>
(1.75)	<u>2</u>	(2.25)	<u>2.5</u>	(2.75)	<u>3</u>
(3.5)	<u>4</u>	(4.5)	<u>5</u>	(5.5)	<u>6</u>
(7)	<u>8</u>	(9)	<u>10</u>	(11)	<u>12</u>

Evitar los números entre paréntesis.

Los números mayores o menores se obtienen multiplicando o dividiendo los de la tabla por 2, 4, 8, 16, etc...

Tabla II-1 Módulos normalizados

Aunque los países que utilizaban medidas inglesas van adoptando el sistema internacional de medidas, todavía se puede encontrar ruedas dentadas en las que el tamaño del diente viene determinado por el "Paso Diametral" o "Diametral Pitch" (P_d) que representa el número de dientes dividido por el diámetro primitivo expresado en pulgadas. No confundir el paso diametral (P_d) con el paso entre dientes (p)

$$P_d = \frac{z}{d(\text{en pulgadas})} \quad (\text{II-10})$$

Su relación con el módulo será:

$$m = \frac{1 \text{ pulgada}}{P_d} = \frac{25.4}{P_d} \quad (\text{II-11})$$

En la tabla II-2 se exponen pasos diametrales normalizados y su equivalencia aproximada con el módulo correspondiente.

DIAMETRAL PITCH NORMALES					
(número de dientes por pulgada de diámetro)					
P_d	módulo equivalente en (mm)	P_d	módulo equivalente en (mm)	P_d	módulo equivalente en (mm)
80	0,318	(18)	(1,41)	(4,5)	(5,64)
64	0,397	16	1,59	4	6,35
48	0,529	(14)	(1,81)	(3,5)	(7,24)
40	0,635	12	2,12	3	8,47
(36)	(0,705)	(11)	(2,31)	2,75	(9,24)
32	0,794	10	2,54	2,5	10,16
(30)	(0,847)	(9)	(2,82)	5,25	(11,29)
(28)	(0,905)	8	3,18	2	12,70
(26)	(0,977)	(7)	(3,62)	3,25	(14,49)
24	1,058	6	4,23	1,5	16,93
(22)	(1,15)	(5,5)	(4,62)	1,25	20,32
20	1,27	5	5,08	1	25,40

Evitar los números entre paréntesis

Tabla II-2 Pasos Diametrales normalizados

II.3.4 - Línea de engrane

La línea de engrane está formada por los diferentes puntos que va ocupando el punto de contacto entre los dientes de dos ruedas dentadas respecto del eslabón fijo.

Como cada diente tiene dos flancos de posible contacto, un engranaje tendrá dos posibles líneas de engrane en función del sentido de giro y de la rueda que sea la motora según se ve en la figura (II-20).

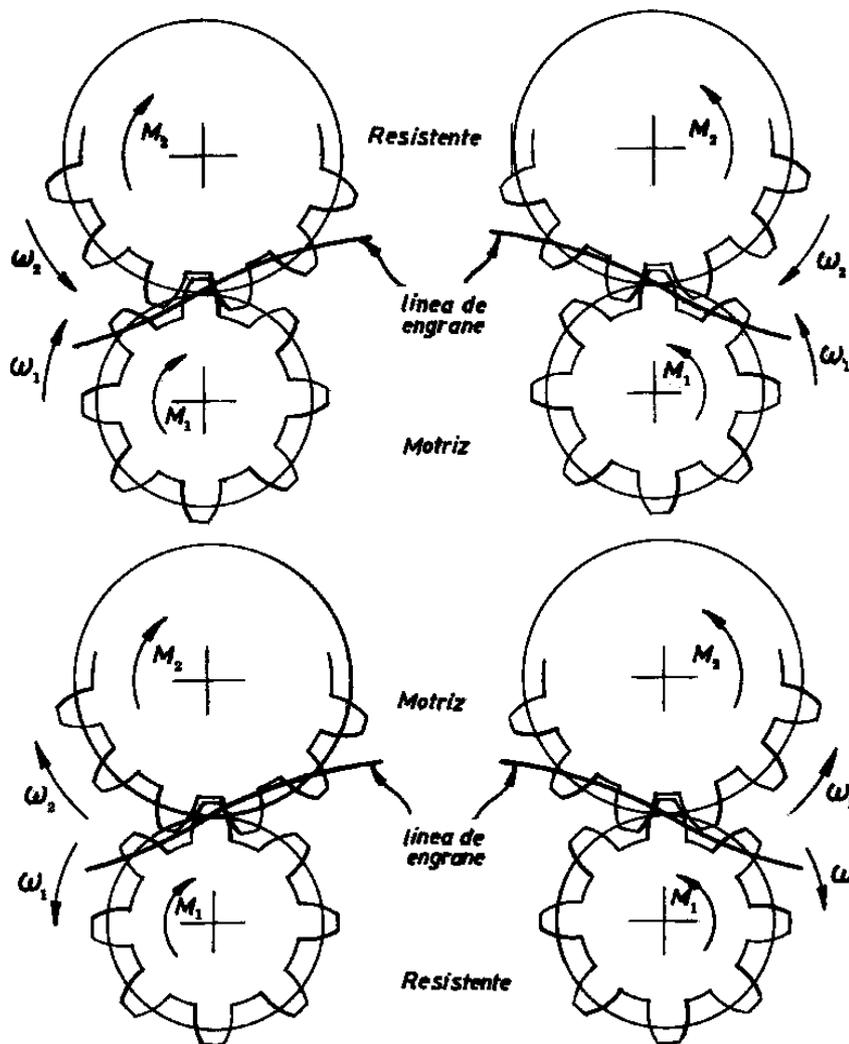


Fig. II-20 Líneas de engrane

II.3.5 - Línea de acción o empuje y ángulo de presión

La línea de acción o de empuje es la dirección de las fuerzas que se transmiten entre las dos ruedas dentadas que forman el engranaje. Si no se tiene en cuenta el rozamiento, estas fuerzas serán perpendiculares a la tangente a los perfiles de los dientes en el punto de contacto "P", y si estos cumplen la ley de engrane, pasará por el centro instantáneo de rotación "I" según se ve en la figura (II-21).

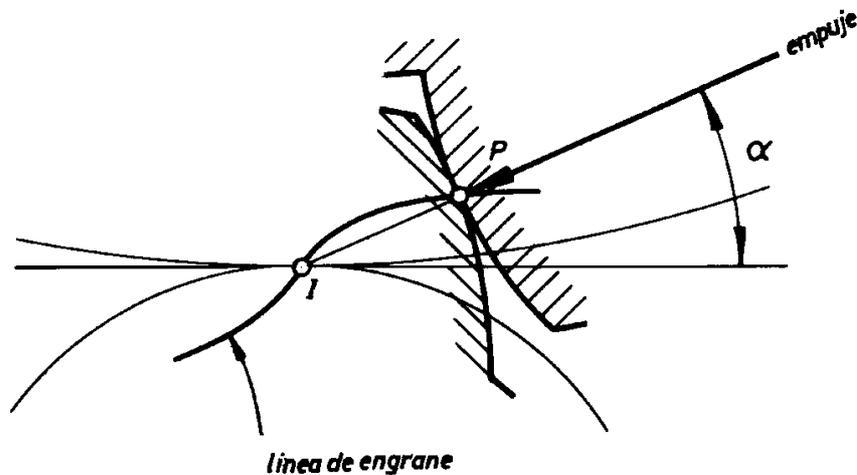


Fig. II-21 Línea de acción o de empuje y ángulo de presión

El ángulo de presión " α " es el formado entre la línea de acción o empuje y la tangente común a los axoides en el punto "I".

II.3.6 - Zona de engrane

El contacto entre las ruedas dentadas de un engranaje se produce entre los flancos de sus dientes. En la figura (II-22) se pueden apreciar las circunferencias de fondo y cabeza que limitan al diente, la circunferencia axoide o primitiva, el paso "p", la altura de cabeza h_a y la altura de fondo h_f .

La zona de contacto entre los dientes está limitada por las circunferencias de cabeza, por lo que las líneas de engrane representadas en la figura (II-20) quedan reducidas a la porción de ellas que queda dentro de dicha zona como puede apreciarse en la figura (II-23).

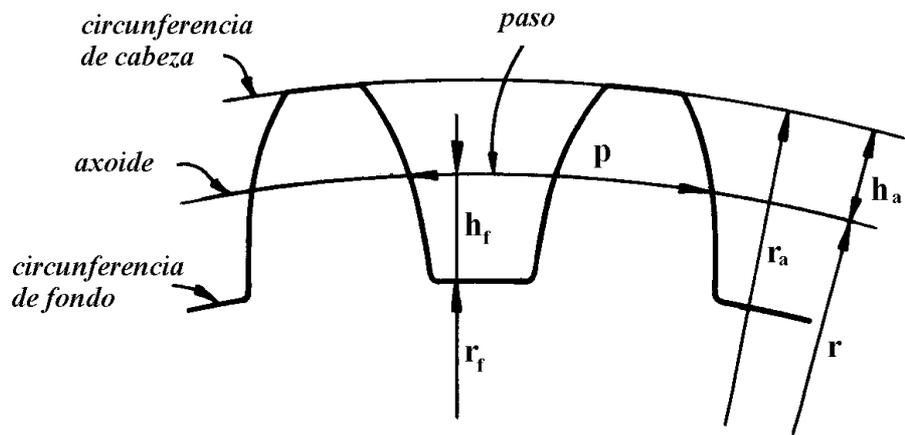


Fig. II-22 Dimensiones del diente de una rueda dentada

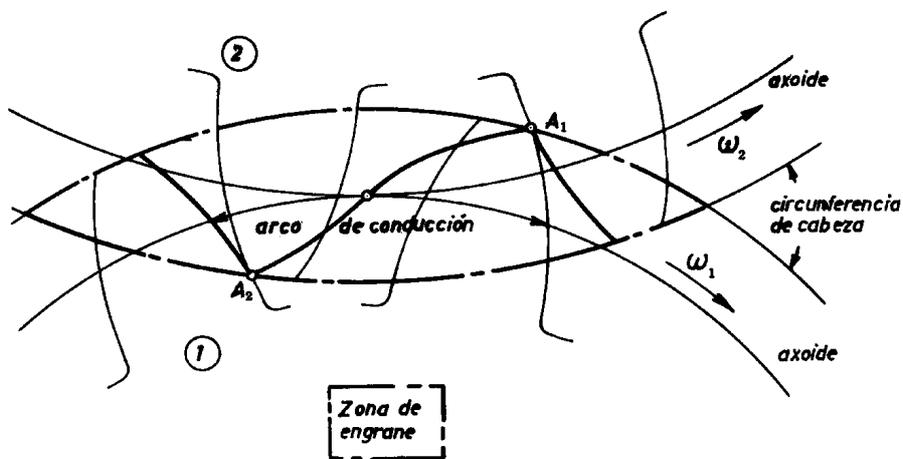


Fig. II-23 Zona de engrane entre dos ruedas dentadas

Cuando el engrane se produce entre una rueda dentada y una cremallera, la zona de engrane queda limitada por la circunferencia de cabeza de la rueda y la recta de cabeza de la cremallera, tal como se ve en la figura (II-24).

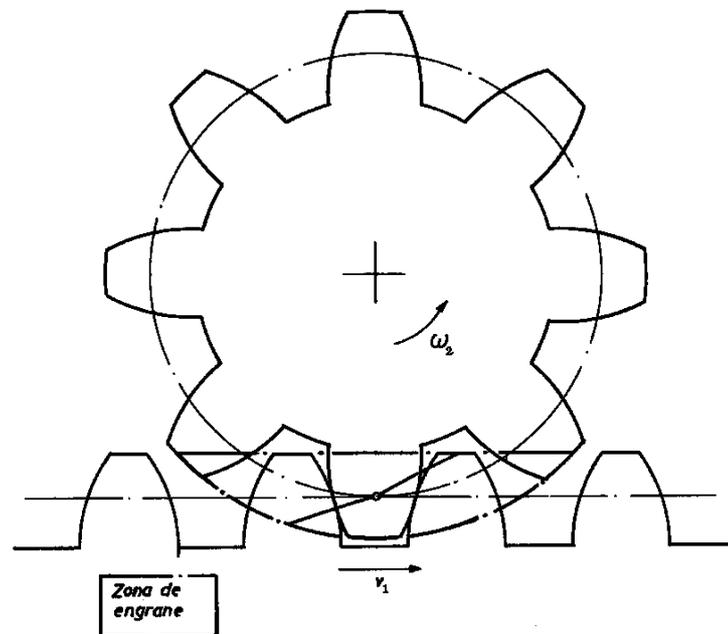


Fig. II-24 Zona de engrane entre rueda dentada y cremallera

II.3.7 - Dimensiones de un engranaje normal

Un engranaje se puede considerar totalmente normal cuando está formado por dos ruedas en las que:

- El módulo "m" tiene un valor normalizado, se expresa en milímetros.
- El ángulo de presión " α " es de 20° .
- La altura de cabeza " h_a " es igual a 1 módulo.
- La altura de fondo " h_f " es igual a 1.25 módulos.
- El espesor del diente "s" y del hueco "e" son iguales a la mitad del paso.
- La distancia entre centros de las ruedas "a" es la correcta.

También se puede considerar casi normal un engranaje en el que ángulo de presión sea diferente de 20° , si se cumplen las otras condiciones.

Las dimensiones de una rueda normal pueden verse en la figura (II-25).

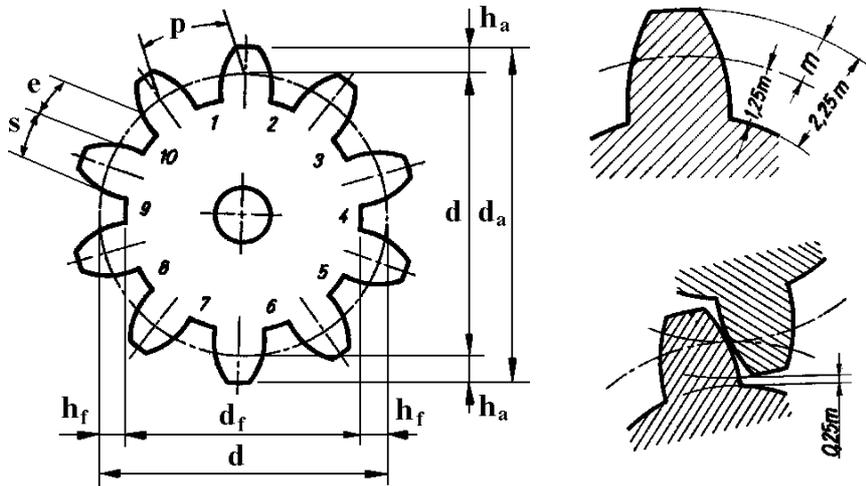


Fig. II-25 Dimensiones de una rueda dentada normal

En una rueda dentada normal cuyo número de dientes sea "z" y su módulo "m", se tendrán las dimensiones siguientes:

$$d = z \cdot m \quad (\text{II-12})$$

$$p = \pi \cdot m \quad (\text{II-13})$$

$$e = s = \frac{p}{2} \quad (\text{II-14})$$

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (\text{II-15})$$

$$h_a = 1 \cdot m \quad (\text{II-16})$$

$$h_f = 1.25 \cdot m \quad (\text{II-17})$$

$$h = h_a + h_f = 2.25 \cdot m \quad (\text{II-18})$$

$$d_a = d + 2 \cdot h_a = d + 2 \cdot m = (z + 2) \cdot m \quad (\text{II-19})$$

$$d_f = d - 2 \cdot h_f = d - 2 \times 1.25 \cdot m = d - 2.5 \cdot m \quad (\text{II-20})$$

$$\alpha = 20^\circ$$

II.3.8 - Dimensiones de un engranaje de diente corto

Un engranaje que se puede considerar casi normal es el formado por ruedas dentadas de diente de corto, figura (II-26), en el que solamente varía respecto de los normales la altura de cabeza " h_a ", la altura de fondo " h_f " y por lo tanto la altura del diente " h ", el diámetro de cabeza " d_a " y el diámetro de fondo " d_f ". En estas ruedas son válidas las ecuaciones de la (II-12) a la (II-15), quedando de (II-16) a la (II-20) de la forma siguiente:

$$h_a = 0.75 \cdot m \quad (\text{II-21})$$

$$h_f = 1 \cdot m \quad (\text{II-22})$$

$$h = h_a + h_f = 1.75 \cdot m \quad (\text{II-23})$$

$$d_a = d + 2 \cdot h_a = d + 2 \times 0.75 \cdot m = d + 1.5 \cdot m \quad (\text{II-24})$$

$$d_f = d - 2 \cdot h_f = d - 2 \times 1 \cdot m = d - 2 \cdot m \quad (\text{II-25})$$

$$\alpha = 20^\circ$$

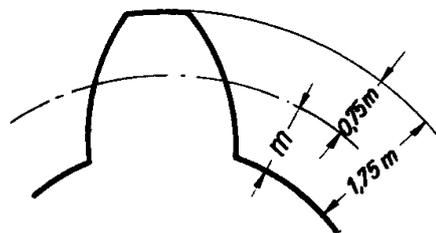


Fig. II-25 Dimensiones del diente corto

II.3.9 - Perfil del diente: Cicloidal y evolvente

Según se vio en el apartado (II.3.2), para que las dos ruedas dentadas que forman un engranaje transmitan bien el movimiento deben cumplir la ley engrane, es decir, los perfiles de sus dientes deben ser conjugados.

Aunque teóricamente existen infinitos perfiles conjugados, en la práctica se han utilizado muy pocos, y de éstos cabe destacar los siguientes:

- Perfil cicloidal.
- Perfil de evolvente o involuta.

Los dientes de perfil cicloidal están formados: en la cabeza por un trozo de epicicloide y en el pie por un trozo de hipocicloide, figura (II-27).

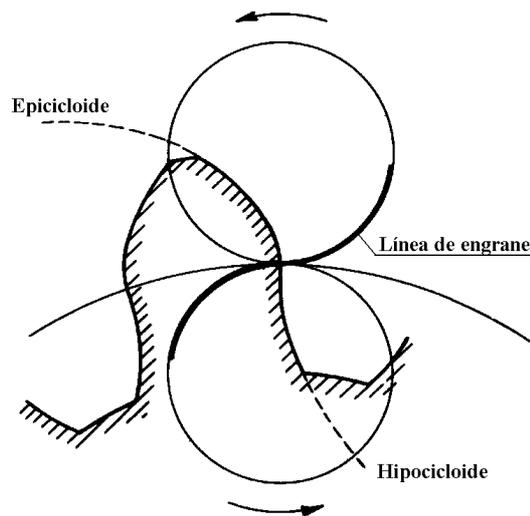


Fig. II-27 Perfil del diente cicloidal

La epicicloide de la cabeza del diente de una rueda es perfil conjugado de la hipocicloide del pie de la otra rueda siempre que estas curvas estén generadas por circunferencias del mismo diámetro girando sin deslizamiento sobre y bajo la circunferencia axoide respectivamente.

El perfil cicloidal se utilizó mucho a principios del siglo XX, pero en la actualidad está prácticamente desechado por la serie de ventajas que ofrece el perfil de evolvente o involuta que es el que más se utiliza en la actualidad.

En las ruedas de perfil de evolvente todo el flanco del perfil del diente está formado por un trozo de evolvente.

La evolvente es la curva que describe el extremo de una cuerda que desarrolla, manteniéndose tensa, de una circunferencia que recibe el nombre de circunferencia base. También sería la trayectoria que describe un punto de una regla que rueda sin deslizamiento sobre la circunferencia base, figura (II-28).

Por la forma en que se dibuja, se cumple que la perpendicular trazada a la tangente de la evolvente en cualquier punto de la evolvente, es tangente a la circunferencia base.

Según se verá en los próximos apartados, el perfil de evolvente tiene una serie de ventajas, como son:

- El perfil de evolvente es conjugado de si mismo.
- Sigue siendo conjugado aunque varíe la distancia entre centros de las ruedas.
- La línea de engrane es recta.
- El ángulo de presión es constante.
- La cremallera de evolvente tiene los flancos rectos.

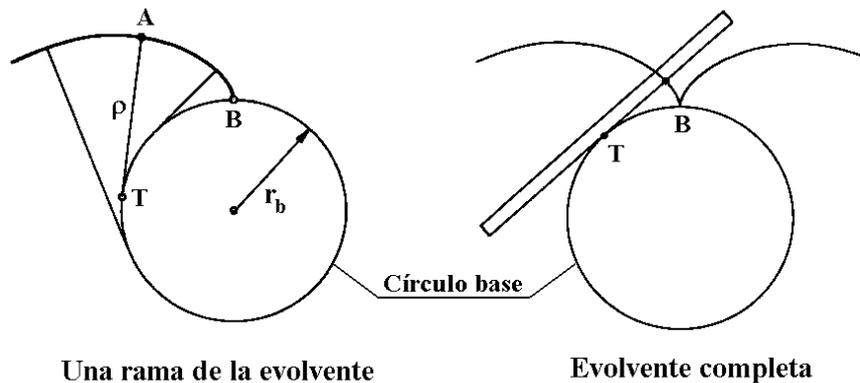


Fig. II-28 Evolvente de círculo

II.3.10 - Ecuaciones paramétricas de la evolvente

Tomando como origen la recta que va del centro de la circunferencia base al punto "B", un punto cualquiera de la evolvente se puede expresar en coordenadas polares "r" y "φ" en función de un parámetro que será el ángulo "ψ", de este modo las coordenadas paramétricas serán:

$$r = \frac{r_b}{\cos \psi} \quad (\text{II-26})$$

$$\phi = \text{tg } \psi - \psi \quad (\text{II-27})$$

Para demostrar la ecuación (II-27), en la figura (II-29) se observa que el arco "BC" es igual al arco "TB" menos el arco "TC" y que la longitud del arco "TB" es igual al de la recta "TA", por lo tanto se puede escribir:

$$BC = AT - TC \quad (II-28)$$

La ecuación (II-28) se puede expresar como

$$r_b \cdot \varphi = r_b \cdot \text{tg } \psi - r_b \cdot \psi \quad (II-29)$$

De la que simplificando resulta la ecuación (II-27).

Al ángulo " φ " se le llama evolvente de " ψ " (Ev. ψ) o involuta de " ψ " (inv. ψ), con lo que la ecuación (II-27) se puede expresar

$$\text{inv. } \psi = \text{Ev. } \psi = \varphi = \text{tg } \psi - \psi \quad (II-30)$$

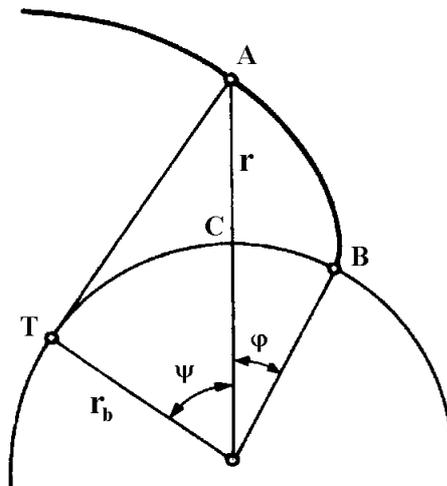


Fig. II-29 Coordenadas polares de la evolvente

Con el fin de facilitar los cálculos los valores de la función evolvente o involuta están tabulados.

En la tabla (II-3) se recogen los valores de la evolvente o involuta de " α " que es con la letra que se representa el ángulo de presión en las ruedas dentadas.

Síntesis de Mecanismos y Máquinas

Grados inv. α	Grados inv. α	Grados inv. α	Grados inv. α
00.0	0.000000		
00.1	0.000000	04.1	0.000122
00.2	0.000000	04.2	0.000132
00.3	0.000000	04.3	0.000141
00.4	0.000000	04.4	0.000151
00.5	0.000000	04.5	0.000162
00.6	0.000000	04.6	0.000173
00.7	0.000000	04.7	0.000184
00.8	0.000000	04.8	0.000197
00.9	0.000001	04.9	0.000209
01.0	0.000002	05.0	0.000222
01.1	0.000002	05.1	0.000236
01.2	0.000003	05.2	0.000250
01.3	0.000004	05.3	0.000265
01.4	0.000005	05.4	0.000280
01.5	0.000006	05.5	0.000296
01.6	0.000007	05.6	0.000312
01.7	0.000009	05.7	0.000329
01.8	0.000010	05.8	0.000347
01.9	0.000012	05.9	0.000366
02.0	0.000014	06.0	0.000384
02.1	0.000016	06.1	0.000404
02.2	0.000019	06.2	0.000424
02.3	0.000022	06.3	0.000445
02.4	0.000025	06.4	0.000467
02.5	0.000028	06.5	0.000489
02.6	0.000031	06.6	0.000512
02.7	0.000035	06.7	0.000536
02.8	0.000039	06.8	0.000560
02.9	0.000043	06.9	0.000586
03.0	0.000048	07.0	0.000612
03.1	0.000053	07.1	0.000638
03.2	0.000058	07.2	0.000666
03.3	0.000064	07.3	0.000694
03.4	0.000070	07.4	0.000723
03.5	0.000076	07.5	0.000753
03.6	0.000083	07.6	0.000783
03.7	0.000090	07.7	0.000815
03.8	0.000097	07.8	0.000847
03.9	0.000105	07.9	0.000880
04.0	0.000114	08.0	0.000914
		08.1	0.000949
		08.2	0.000985
		08.3	0.001022
		08.4	0.001059
		08.5	0.001098
		08.6	0.001137
		08.7	0.001178
		08.8	0.001219
		08.9	0.001262
		09.0	0.001305
		09.1	0.001349
		09.2	0.001394
		09.3	0.001440
		09.4	0.001488
		09.5	0.001536
		09.6	0.001586
		09.7	0.001636
		09.8	0.001688
		09.9	0.001740
		10.0	0.001794
		10.1	0.001849
		10.2	0.001905
		10.3	0.001962
		10.4	0.002020
		10.5	0.002079
		10.6	0.002140
		10.7	0.002202
		10.8	0.002265
		10.9	0.002329
		11.0	0.002394
		11.1	0.002461
		11.2	0.002528
		11.3	0.002598
		11.4	0.002668
		11.5	0.002739
		11.6	0.002812
		11.7	0.002894
		11.8	0.002962
		11.9	0.003039
		12.0	0.003117
		12.1	0.003197
		12.2	0.003277
		12.3	0.003360
		12.4	0.003443
		12.5	0.003529
		12.6	0.003615
		12.7	0.003712
		12.8	0.003792
		12.9	0.003883
		13.0	0.003975
		13.1	0.004069
		13.2	0.004164
		13.3	0.004261
		13.4	0.004359
		13.5	0.004459
		13.6	0.004561
		13.7	0.004664
		13.8	0.004768
		13.9	0.004874
		14.0	0.004982
		14.1	0.005091
		14.2	0.005202
		14.3	0.005315
		14.4	0.005429
		14.5	0.005545
		14.6	0.005662
		14.7	0.005782
		14.8	0.005903
		14.9	0.006025
		15.0	0.006150
		15.1	0.006276
		15.2	0.006404
		15.3	0.006534
		15.4	0.006665
		15.5	0.006799
		15.6	0.006934
		15.7	0.007071
		15.8	0.007209
		15.9	0.007350
		16.0	0.007493

Continúa.

Engranajes

Continuación.

Grados	inv. α						
16.1	0.007637	20.1	0.015137	24.1	0.026697	28.1	0.043513
16.2	0.007784	20.2	0.015372	24.2	0.027048	28.2	0.044012
16.3	0.007932	20.3	0.015609	24.3	0.027402	28.3	0.044516
16.4	0.008082	20.4	0.015850	24.4	0.027760	28.4	0.045024
16.5	0.008234	20.5	0.016092	24.5	0.028121	28.5	0.045537
16.6	0.008388	20.6	0.016337	24.6	0.028485	28.6	0.046054
16.7	0.008544	20.7	0.016585	24.7	0.028852	28.7	0.046575
16.8	0.008702	20.8	0.016836	24.8	0.029223	28.8	0.047100
16.9	0.008863	20.9	0.017089	24.9	0.029598	28.9	0.047630
17.0	0.009025	21.0	0.017345	25.0	0.029975	29.0	0.048164
17.1	0.009189	21.1	0.017603	25.1	0.030357	29.1	0.048702
17.2	0.009355	21.2	0.017865	25.2	0.030741	29.2	0.049245
17.3	0.009523	21.3	0.018129	25.3	0.031130	29.3	0.049792
17.4	0.009694	21.4	0.018395	25.4	0.031521	29.4	0.050344
17.5	0.009866	21.5	0.018665	25.5	0.031917	29.5	0.050901
17.6	0.010041	21.6	0.018937	25.6	0.032315	29.6	0.051462
17.7	0.010217	21.7	0.019212	25.7	0.032718	29.7	0.052027
17.8	0.010396	21.8	0.019490	25.8	0.033124	29.8	0.052597
17.9	0.010577	21.9	0.019770	25.9	0.033534	29.9	0.053172
18.0	0.010760	22.0	0.020054	26.0	0.033947	30.0	0.053751
18.1	0.010946	22.1	0.020340	26.1	0.034364	30.1	0.054336
18.2	0.011133	22.2	0.020630	26.2	0.034785	30.2	0.054924
18.3	0.011323	22.3	0.020921	26.3	0.035209	30.3	0.055518
18.4	0.011515	22.4	0.021216	26.4	0.035637	30.4	0.056116
18.5	0.011709	22.5	0.021514	26.5	0.036069	30.5	0.056720
18.6	0.011906	22.6	0.021815	26.6	0.036505	30.6	0.057328
18.7	0.012105	22.7	0.022119	26.7	0.036945	30.7	0.057940
18.8	0.012306	22.8	0.022426	26.8	0.037388	30.8	0.058558
18.9	0.012509	22.9	0.022736	26.9	0.037835	30.9	0.059181
19.0	0.012715	23.0	0.023049	27.0	0.038287	31.0	0.059809
19.1	0.012923	23.1	0.023365	27.1	0.038742	31.1	0.060441
19.2	0.013134	23.2	0.023684	27.2	0.039201	31.2	0.061079
19.3	0.013346	23.3	0.024006	27.3	0.039664	31.3	0.061721
19.4	0.013562	23.4	0.024332	27.4	0.040131	31.4	0.062369
19.5	0.013779	23.5	0.024660	27.5	0.040602	31.5	0.063022
19.6	0.013999	23.6	0.024992	27.6	0.041076	31.6	0.063680
19.7	0.014222	23.7	0.025326	27.7	0.041556	31.7	0.064343
19.8	0.014447	23.8	0.025664	27.8	0.042039	31.8	0.065012
19.9	0.014674	23.9	0.026005	27.9	0.042526	31.9	0.065685
20.0	0.014904	24.0	0.026350	28.0	0.043017	32.0	0.066364

Continúa.

Continuación.

Grados inv. α	Grados inv. α	Grados inv. α	Grados inv. α
32.1	0.067048	35.6	0.094592
32.2	0.067738	35.7	0.095490
32.3	0.068432	35.8	0.096395
32.4	0.069133	35.9	0.097306
32.5	0.069838	36.0	0.098224
32.6	0.070549	36.1	0.099149
32.7	0.071266	36.2	0.100080
32.8	0.071988	36.3	0.101019
32.9	0.072716	36.4	0.101964
33.0	0.073449	36.5	0.102916
33.1	0.074188	36.6	0.103875
33.2	0.074932	36.7	0.104841
33.3	0.075683	36.8	0.105814
33.4	0.076439	36.9	0.106795
33.5	0.077200	37.0	0.107782
33.6	0.077968	37.1	0.108777
33.7	0.078741	37.2	0.109779
33.8	0.079520	37.3	0.110788
33.9	0.080305	37.4	0.111805
34.0	0.081097	37.5	0.112829
34.1	0.081894	37.6	0.113860
34.2	0.082697	37.7	0.114899
34.3	0.083506	37.8	0.115945
34.4	0.084321	37.9	0.116999
34.5	0.085142	38.0	0.118061
34.6	0.085970	38.1	0.119130
34.7	0.086804	38.2	0.120207
34.8	0.087644	38.3	0.121291
34.9	0.088490	38.4	0.122384
35.0	0.089342	38.5	0.123484
35.1	0.090201	38.6	0.124592
35.2	0.091067	38.7	0.125709
35.3	0.091938	38.8	0.126833
35.4	0.092816	38.9	0.127965
35.5	0.093701	39.0	0.129106
39.1	0.130254	39.1	0.130254
39.2	0.131411	39.2	0.131411
39.3	0.132576	39.3	0.132576
39.4	0.133750	39.4	0.133750
39.5	0.134931	39.5	0.134931
39.6	0.136122	39.6	0.136122
39.7	0.137320	39.7	0.137320
39.8	0.138528	39.8	0.138528
39.9	0.139743	39.9	0.139743
40.0	0.140968	40.0	0.140968
40.1	0.142201	40.1	0.142201
40.2	0.143443	40.2	0.143443
40.3	0.144694	40.3	0.144694
40.4	0.145954	40.4	0.145954
40.5	0.147222	40.5	0.147222
40.6	0.148500	40.6	0.148500
40.7	0.149787	40.7	0.149787
40.8	0.151083	40.8	0.151083
40.9	0.152388	40.9	0.152388
41.0	0.153702	41.0	0.153702
41.1	0.155025	41.1	0.155025
41.2	0.156358	41.2	0.156358
41.3	0.157700	41.3	0.157700
41.4	0.159052	41.4	0.159052
41.5	0.160414	41.5	0.160414
41.6	0.161785	41.6	0.161785
41.7	0.163165	41.7	0.163165
41.8	0.164556	41.8	0.164556
41.9	0.165956	41.9	0.165956
42.0	0.167366	42.0	0.167366
42.1	0.168786	42.1	0.168786
42.2	0.170216	42.2	0.170216
42.3	0.171656	42.3	0.171656
42.4	0.173106	42.4	0.173106
42.5	0.174566	42.5	0.174566
42.6	0.176037	42.6	0.176037
42.7	0.177518	42.7	0.177518
42.8	0.179009	42.8	0.179009
42.9	0.180511	42.9	0.180511
43.0	0.182024	43.0	0.182024
43.1	0.183547	43.1	0.183547
43.2	0.185080	43.2	0.185080
43.3	0.186625	43.3	0.186625
43.4	0.188180	43.4	0.188180
43.5	0.189746	43.5	0.189746
43.6	0.191324	43.6	0.191324
43.7	0.192912	43.7	0.192912
43.8	0.194511	43.8	0.194511
43.9	0.196122	43.9	0.196122
44.0	0.197744	44.0	0.197744
44.1	0.199377	44.1	0.199377
44.2	0.201022	44.2	0.201022
44.3	0.202678	44.3	0.202678
44.4	0.204346	44.4	0.204346
44.5	0.206026	44.5	0.206026
44.6	0.207717	44.6	0.207717
44.7	0.209420	44.7	0.209420
44.8	0.211135	44.8	0.211135
44.9	0.212863	44.9	0.212863
45.0	0.214602	45.0	0.214602
45.1	0.216353	45.1	0.216353
45.2	0.218117	45.2	0.218117
45.3	0.219893	45.3	0.219893
45.4	0.221682	45.4	0.221682
45.5	0.223483	45.5	0.223483
45.6	0.225296	45.6	0.225296
45.7	0.227123	45.7	0.227123
45.8	0.228962	45.8	0.228962
45.9	0.230814	45.9	0.230814
46.0	0.232679	46.0	0.232679

Tabla II-3 Valores de la evolvente o involuta de α

II.3.11 - Datos intrínsecos de una rueda con perfil de evolvente

Cuando las ruedas dentadas con perfil de evolvente que forman un engranaje no cumplen las condiciones expuestas en los apartados (II.3.7) o (II.3.8), es decir no son ruedas normales, no se pueden aplicar las ecuaciones recogidas en dichos apartados para determinar sus dimensiones. En este caso se utilizan los datos intrínsecos de las ruedas.

El origen de la anomalía de las ruedas suele proceder principalmente del hecho de que los espesores del diente y del hueco medidos sobre la circunferencia primitiva son diferentes. Esta diferencia puede provenir de que se han hecho diferentes o de que se ha variado la distancia entre centros de las ruedas con lo que varían los diámetros primitivos.

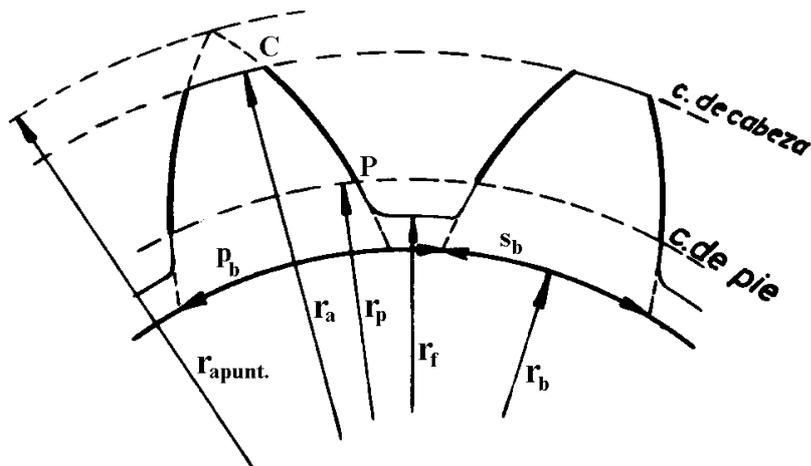


Fig. II-30 Datos intrínsecos de una rueda dentada con perfil de evolvente

Los datos intrínsecos de una rueda dentada con perfil de evolvente (figura II-30) son aquellos datos, propios de la rueda, que no varían independientemente de con que otra rueda engrane y a que distancia entre centros lo haga, y son los siguientes:

- Número de dientes "z".
- Radio de la circunferencia base sobre la que se ha generado el perfil de evolvente " r_b ".
- Paso base (paso medido sobre la circunferencia base de generación de la evolvente) " p_b ".

- Espesor base (espesor del diente medido sobre la circunferencia base) " s_b ".
- Radio de la circunferencia de cabeza " r_a ".
- Radio de la circunferencia del fondo del diente " r_f ".
- Radio de pie " r_p " o radio de la circunferencia del punto más bajo del diente con el que contacta el vértice de cabeza de la cremallera con que se ha tallado la rueda.

Sobre la circunferencia base también se puede definir el módulo base como:

$$m_b = \frac{p_b}{\pi} = \frac{2\pi r_b}{\pi z} = \frac{2 \cdot r_b}{z} = \frac{d_b}{z} \quad (\text{II-31})$$

Los datos intrínsecos de una rueda dentada ya tallada se pueden determinar: " z " contándolos y " r_a " y " r_f " midiéndolos. Para determinar " r_b ", " p_b " y " s_b ", según se observa en la figura (II-31), se toman las medidas " W_{k+1} " y " W_k " entre los flancos de los dientes y cuyos valores serán:

$$W_{k+1} = k \cdot p_b + s_b \quad (\text{II-32})$$

$$W_k = (k-1) \cdot p_b + s_b \quad (\text{II-33})$$

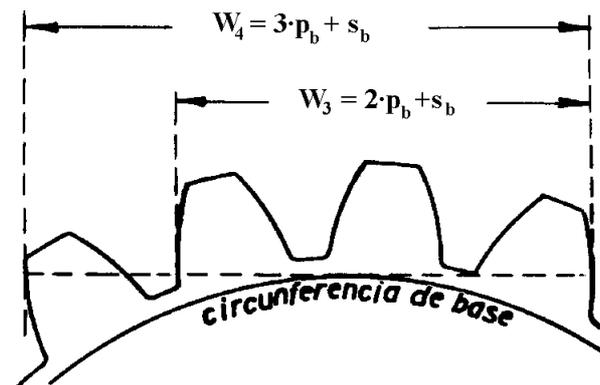


Fig. II-31 Medida del paso base y del espesor base

De las ecuaciones (II-32) y (II-33) se obtiene:

$$p_b = W_{k+1} - W_k \quad (\text{II-34})$$

$$s_b = W_k - (k-1) \cdot p_b \quad (\text{II-35})$$

Y de la (II-34) se puede obtener

$$r_b = \frac{z \cdot p_b}{2\pi} \quad (\text{II-36})$$

II.3.12 - Engrane entre perfiles de evolvente

La figura (II-32) muestra el engrane entre los perfiles de evolvente de dos ruedas dentadas en los que el contacto se produce en el punto "P".

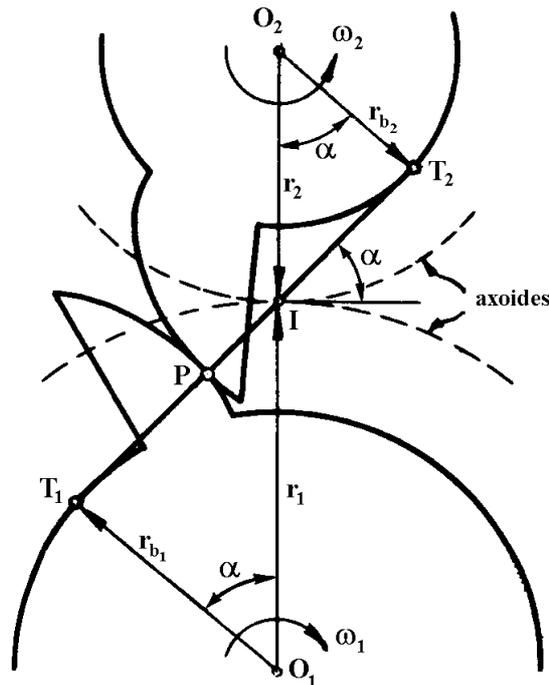


Fig. II-32 Engrane entre perfiles de evolvente

Al ser evolvente el perfil de la rueda "1", la perpendicular trazada a la tangente al perfil de la rueda "1" en el punto "P" será tangente a la circunferencia base de la rueda "1". Al ser también evolvente el perfil de la

rueda "2", la perpendicular trazada a la tangente del perfil de la rueda "2" en el punto "P" será tangente a la circunferencia base de la rueda "2".

Como la tangente a los dos perfiles en el punto "P" es única, su perpendicular también lo será, y por lo tanto, la perpendicular trazada por el punto "P" a la tangente a los perfiles en el punto de contacto es tangente a las dos circunferencias base. De aquí se desprende que:

- La perpendicular trazada a la tangente común a los perfiles de los dientes en el punto de contacto corta siempre a la recta de unión de centros en un punto fijo que será el centro instantáneo de rotación relativo a las dos ruedas "1", por lo que se cumple la ley de engrane. Resultando que el perfil de evolvente es conjugado de si mismo.
- El contacto se produce siempre sobre la tangente común a las dos circunferencias base, por lo que la línea de engrane es recta.
- Al ser la línea de engrane recta, el ángulo de presión será constante durante toda la línea de engrane.

Así quedan demostradas tres de las ventajas del perfil de evolvente enumeradas en el apartado (II.3.9).

De la figura se desprende que los radios de las circunferencias primitivas serán:

$$r_1 = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha} \quad (\text{II-37})$$

$$r_2 = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha} \quad (\text{II-38})$$

De las ecuaciones (II-37) y (II-38) se desprende que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} \quad (\text{II-39})$$

Y la ecuación (II-9) se podrá ampliar a

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} \quad (\text{II-40})$$

De la ecuación (II-40) se obtiene que

$$\omega_1 \cdot r_{b1} = \omega_2 \cdot r_{b2} \quad (\text{II-41})$$

La ecuación (II-41) indica que la velocidades lineales de los puntos de las circunferencias base de las dos ruedas son iguales. De esta ecuación se deduce que el movimiento de dos ruedas con perfil de evolvente es equivalente al movimiento de dos carretes en los que en uno se desenrolla una cuerda y en el otro se enrolla y cuyos radios son los radios de base de las ruedas.

De la figura (II-32) también se deduce que el deslizamiento en el punto de contacto será:

$$\text{Deslizamiento} = \overline{PI} \cdot (\omega_2 + \omega_1) \quad (\text{II-42})$$

II.3.13 - Engrane de dos ruedas con perfil de evolvente

En la figura (II-33) se aprecia que la distancia entre centros "a" a la que se pueden montar dos ruedas dentadas con perfil de evolvente puede variar, y el perfil de evolvente sigue siendo conjugado. Al variar la distancia entre centros "a" lo que ocurre es que varía el ángulo de presión " α ".

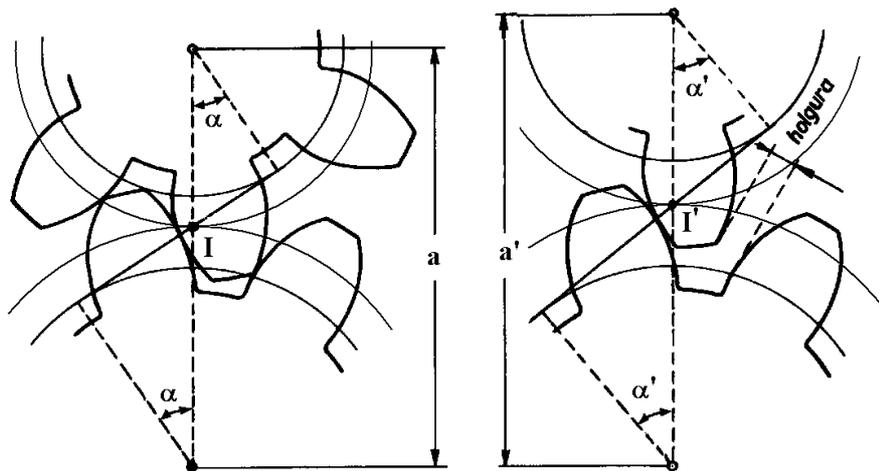


Fig. II-33 Una pareja de ruedas puede engranar con diferentes distancias entre centros

En la figura (II-33) se observa que

$$\cos \alpha = \frac{r_{b1}}{r_1} = \frac{r_{b2}}{r_2} = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{r_1 + r_2} = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{a} \quad (\text{II-43})$$

$$\cos \alpha' = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{a'} \quad (\text{II-44})$$

II.3.14 - Datos de funcionamiento de una rueda de perfil de evolvente

Dos ruedas dentadas con perfil de evolvente tienen cada una sus correspondientes datos intrínsecos. En el momento en que engranan aparecen en cada rueda los datos de funcionamiento, figura (II-34).

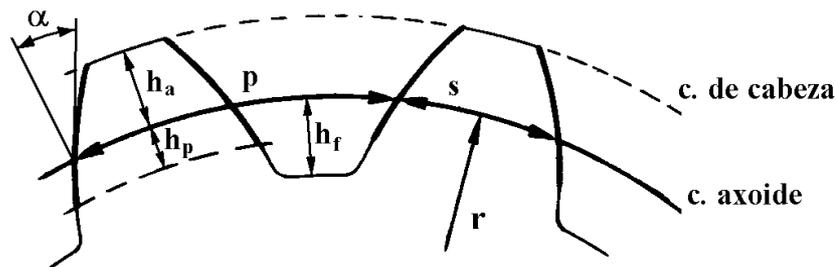


Fig. II-34 Datos de funcionamiento de una rueda dentada

Al engranar las dos ruedas a una determinada distancia entre centros, la tangente a las dos circunferencias base corta a la recta de unión de centros definiendo el punto "I" y los radios de los axoides que son los que determinan los datos de funcionamiento que son los siguientes:

- Ángulo de empuje o de presión " α ".
- Radio del axoide o primitivo " r ".
- Paso medido sobre la circunferencia primitiva " p ".
- Altura de la cabeza del diente " h_a ".
- Altura del pie del diente " h_p ".

Engranajes

- Altura del fondo del diente " h_f ".
- Espesor del diente medido sobre la circunferencia primitiva " s ".

Las ecuaciones que relacionan los datos intrínsecos y los de funcionamiento son las siguientes:

$$\cos \alpha = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{a} \quad (\text{II-45})$$

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha} \quad (\text{II-46})$$

$$p = \frac{2\pi r}{z} \quad (\text{II-47})$$

$$h_a = r_a - r \quad (\text{II-48})$$

$$h_p = r - r_p \quad (\text{II-49})$$

$$h_f = r - r_f \quad (\text{II-50})$$

Sobre la circunferencia primitiva se puede definir también el módulo como:

$$m = \frac{p}{\pi} \quad (\text{II-51})$$

Y teniendo en cuenta las ecuaciones (II-31), (II-36), (II-46), (II-47) y (II-51).

$$m_b = \frac{p_b}{\pi}, \quad p_b = \frac{2\pi r_b}{z}, \quad \cos \alpha = \frac{r_b}{r}, \quad p = \frac{2\pi r}{z}, \quad m = \frac{p}{\pi}$$

Resulta

$$\frac{r_b}{r} = \frac{p_b}{p} = \frac{m_b}{m} = \cos \alpha \quad (\text{II-52})$$

Para determinar el espesor del diente medido sobre la circunferencia primitiva "s" se parte del espesor del diente sobre la circunferencia base "s_b". En la figura (II-35) se puede observar:

$$\beta = \gamma - \varphi \tag{II-53}$$

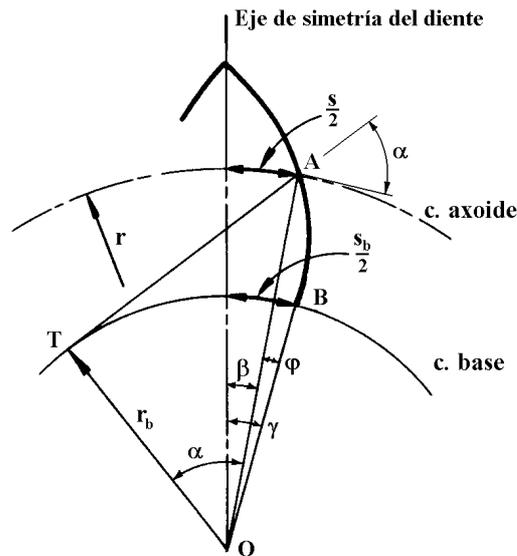


Fig. II-35 Espesor del diente en la circunferencia primitiva

Expresando los ángulos en función de los arcos y teniendo en cuenta que el ángulo "φ" es igual a la "inv. α", resulta:

$$\frac{s/2}{r} = \frac{s_b/2}{r_b} - \text{inv.}\alpha \tag{II-54}$$

Reduciendo a común denominador el segundo término y multiplicando por 2r se obtiene:

$$s = \frac{r}{r_b} (s_b - 2 \cdot r_b \cdot \text{inv.}\alpha) \tag{II-55}$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (II-46), queda finalmente

$$s = \frac{(s_b - 2 \cdot r_b \cdot \text{inv.}\alpha)}{\cos \alpha} \tag{II-55}$$

El espesor del hueco medido sobre la circunferencia primitiva "e" será:

$$e = p - s \quad (\text{II-56})$$

II.3.15 - Engrane de dos ruedas dentadas sin holgura

En la figura (II-36) se aprecia que si dos ruedas dentadas engranan sin holgura, habrá un momento en que los puntos "A₁" y "A₂" contactarán en "I" y lo mismo ocurrirá con los puntos "B₁" y "B₂".

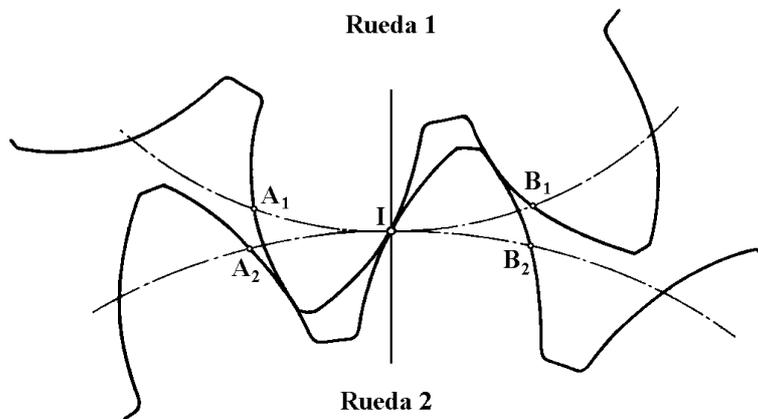


Fig. II-36 Engrane de dos ruedas dentadas sin holgura

Como el engrane de dos ruedas dentadas es equivalente a una rodadura sin deslizamiento de las circunferencias primitivas, resultará las siguientes igualdades de longitudes de arcos:

$$A_1I = A_2I \quad (\text{II-57})$$

$$B_1I = B_2I \quad (\text{II-58})$$

Y como

$$A_1I = s_1 \quad (\text{II-59})$$

$$A_2I = e_2 \quad (\text{II-60})$$

$$B_1I = e_1 \quad (\text{II-61})$$

$$B_2I = s_2 \quad (\text{II-62})$$

$$p = s_1 + e_1 = s_2 + e_2 \quad (\text{II-63})$$

Resultará

$$p = s_1 + s_2 \quad (\text{II-64})$$

Sustituyendo los valores de "s₁" y "s₂" de la ecuación (II-55) se obtendrá:

$$\frac{s_{b1} - 2 \cdot r_{b1} \cdot \text{inv.}\alpha}{\cos \alpha} + \frac{s_{b2} - 2 \cdot r_{b2} \cdot \text{inv.}\alpha}{\cos \alpha} = \frac{p_b}{\cos \alpha} = p \quad (\text{II-65})$$

Y operando

$$s_{b1} + s_{b2} = p_b + 2 \cdot (r_{b1} + r_{b2}) \cdot \text{inv.}\alpha \quad (\text{II-66})$$

De la ecuación (II-66) se puede obtener la "inv α" mínima con la que podrán engranar dos ruedas dentadas, y con ella los datos de funcionamiento sin holgura.

$$\text{inv.}\alpha_{\min.} = \frac{s_{b1} + s_{b2} - p_b}{2 \cdot (r_{b1} + r_{b2})} \quad (\text{II-67})$$

$$r_{1\min.} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_{\min.}} \quad (\text{II-68})$$

$$r_{2\min.} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_{\min.}} \quad (\text{II-69})$$

$$a_{\min.} = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha_{\min.}} \quad (\text{II-70})$$

II.3.16 - Cremallera de evolvente

La cremallera de evolvente se puede considerar como el límite a que tiende una rueda dentada cuando su diámetro tiende a infinito conservando el paso y el ángulo de presión.

En la figura (II-37) se aprecia que el radio de curvatura del perfil de evolvente en el punto "P" es la distancia "TP". En la cremallera como el punto

"T" se va al infinito, resulta que el radio de curvatura del perfil se hace infinito por lo tanto el flanco del perfil del diente de la cremallera de evolvente es recto.

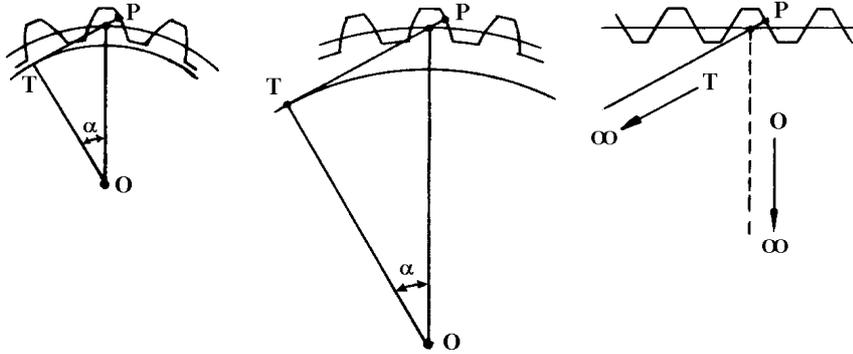


Fig. II-37 Cremallera, límite cuando el radio de una rueda tiende a infinito

En la figura (II-38) se aprecian los datos intrínsecos de una cremallera que son:

- Ángulo de presión " α ".
- Paso " p ".
- Espesor del diente en la línea de referencia " s ".
- Altura de cabeza " h_a ".

La línea de referencia se suele tomar a una altura del diente en el que el espesor del diente " s " es igual al espesor del hueco " e ".

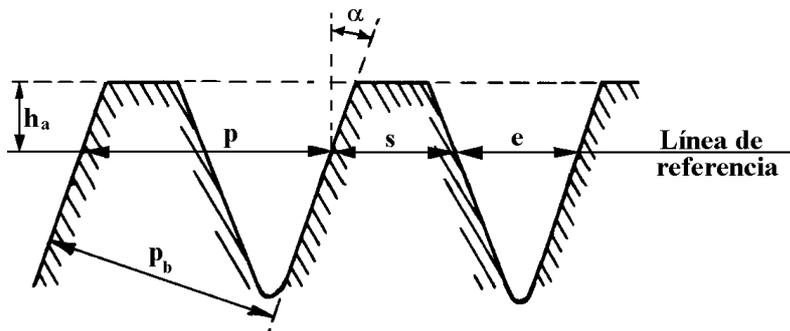


Fig. II-38 Datos intrínsecos de una cremallera de evolvente

En la cremallera, al igual que en las ruedas dentadas la relación entre el paso y el paso base será:

$$p_b = p \cdot \cos \alpha \quad (\text{II-71})$$

II.3.17 - Engrane de rueda dentada y cremallera

Para que puedan engranar una rueda dentada y una cremallera, figura (II-39), deben tener las dos el mismo paso base

$$p_b (\text{cremallera}) = p_b (\text{rueda}) = p (\text{cremallera}) \cos \alpha \quad (\text{II-72})$$

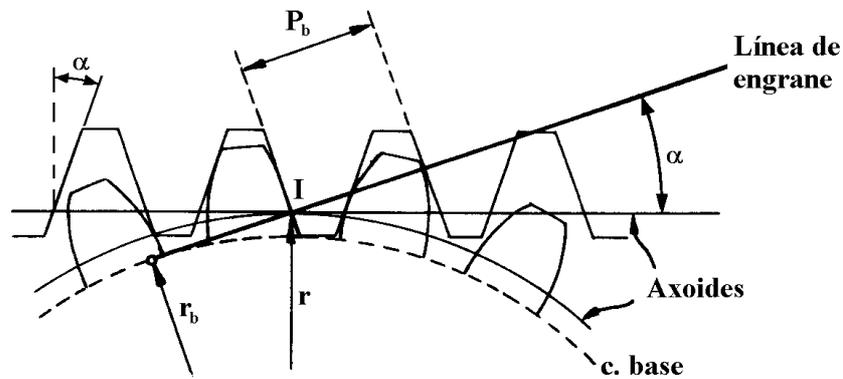


Fig. II-39 Engrane de rueda y cremallera

Y el radio primitivo de la rueda será

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha_{(\text{cremallera})}} \quad (\text{II-73})$$

II.3.18 - Engranaje cilíndrico recto interior

Un engranaje interior, figura (II-40), está formado por una rueda dentada exterior y otra rueda dentada interior.

El hueco de los dientes de la rueda interior tiene la misma forma que los dientes de una rueda dentada exterior del mismo módulo y número de dientes.

En un engranaje interior las velocidades angulares de las dos ruedas que lo forman tienen el mismo sentido.

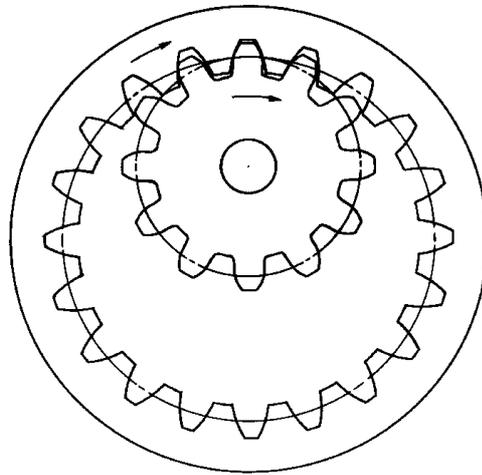


Fig. II-40 Engranaje cilíndrico recto interior

El engranaje interior de ruedas dentadas con perfil de evolvente, figura (II-41), cumple la ley de engrane, ya que la perpendicular trazada a la tangente de los perfiles de los dientes en el punto de contacto es tangente a las dos circunferencias base y por lo tanto corta a la recta de unión de centros en un punto fijo.

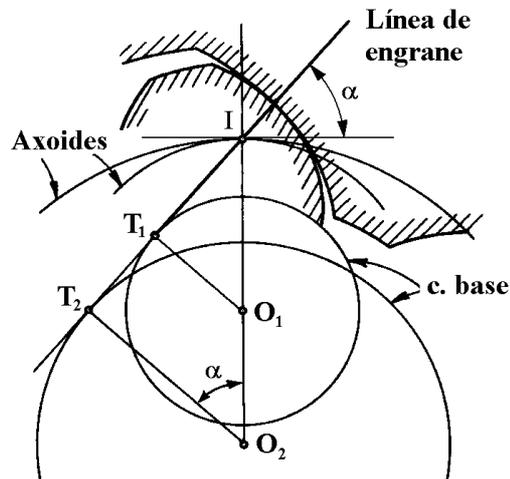


Fig. II-41 Engrane de un diente interior con un diente exterior

II.4 - LIMITACIONES EN EL ENGRANE DE PERFILES DE EVOLVENTE

Para que dos ruedas dentadas engranen bien se debe cumplir que:

- Antes de dejar de engranar dos dientes, entren en contacto los dientes siguientes.
- No haya interferencia entre los dientes de las dos ruedas.
- El radio de cabeza sea como máximo igual al radio de apuntamiento del diente.

II.4.1 - Coeficiente de recubrimiento

El coeficiente de recubrimiento indica el número de dientes de una rueda dentada, que por término medio, están engranando a la vez con dientes de la otra rueda. Debe ser mayor que "1", así se garantiza que antes de dejar de engranar un diente empieza a engranar el siguiente y de este modo la transmisión de movimiento es suave y continua.

II.4.1.1 - Coeficiente de recubrimiento de dos ruedas

En la figura (II-42) se observa que el engrane de un diente comienza en el punto "A₂" y finaliza en el punto "A₁".

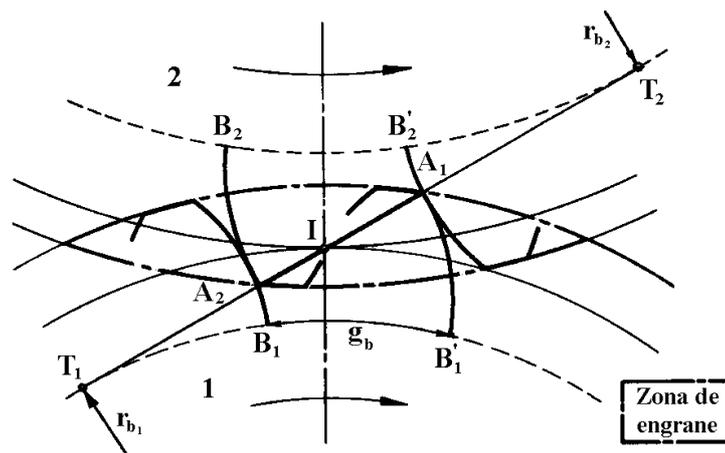


Fig. II-42 Comienzo y fin del engrane de una pareja de dientes

El arco de conducción, medido sobre la circunferencia base, durante el que se produce el engrane de un diente será "g_b", y por tanto el coeficiente de recubrimiento será:

$$\varepsilon = \frac{g_b}{p_b} \quad (II-74)$$

Por la forma en que se traza la evolvente resulta que:

$$g_b = \overline{A_2A_1} = \overline{IA_1} + \overline{IA_2} \quad (II-75)$$

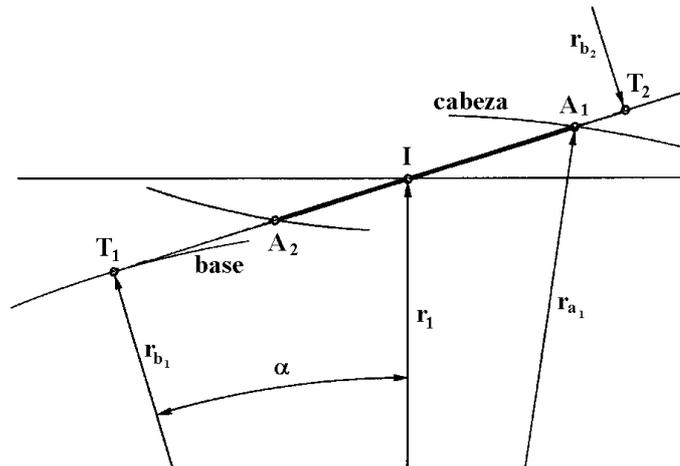


Fig. II-43 Zona activa de la línea de engrane

En la figura (II-43) se puede apreciar que:

$$\overline{IA_1} = \overline{T_1A_1} - \overline{T_1I} \quad (II-76)$$

$$\overline{T_1A_1} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \quad (II-77)$$

$$\overline{T_1I} = r_{b1} \cdot \text{tg } \alpha \quad (II-78)$$

De las ecuaciones (II-76), (II-77) y (II-78) aplicadas a las dos ruedas se obtiene:

$$g_b = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - r_{b1} \cdot \text{tg } \alpha + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - r_{b2} \cdot \text{tg } \alpha \quad (II-79)$$

II.4.1.2 - Coeficiente de recubrimiento de rueda y cremallera

Si engranan una rueda y una cremallera, la parte del arco de conducción correspondiente a la cremallera, figura (II-44), será:

$$\overline{IA} = \frac{h_a}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{II-80})$$

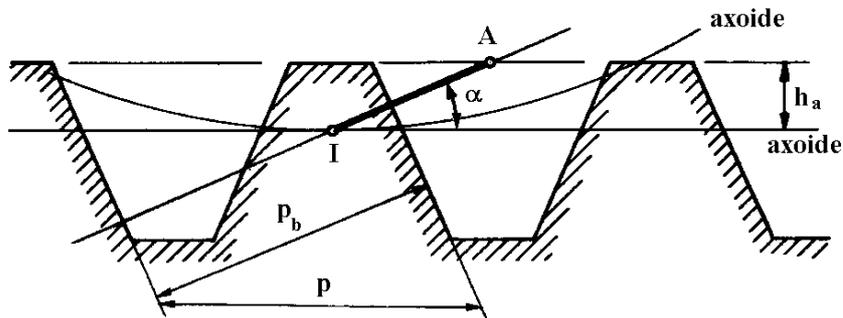


Fig. II-44 Línea de engrane de una cremallera

Y el arco de conducción total será:

$$g_b = \sqrt{r_a^2 - r_b^2} - r_b \cdot \text{tg } \alpha + \frac{h_a}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{II-81})$$

II.4.2 - Interferencia y socavación

Cuando el diente de una rueda dentada intenta penetrar en el diente de la rueda con la engrana se produce la interferencia y cuando la interferencia se produce con la herramienta que talla la rueda, la herramienta elimina todo el material de la rueda que produce la interferencia, produciéndose en este caso la socavación del diente. Estos dos fenómenos son inadmisibles, por lo que deben ser eliminados.

II.4.2.1 - Zona activa del perfil del diente

Como el contacto entre dientes de ruedas dentadas con perfil de evolvente se produce siempre sobre la línea de engrane que es una recta, la zona activa del diente de la rueda representada en la figura (II-45) será el tramo de perfil comprendido entre los puntos "A₂" y "C".

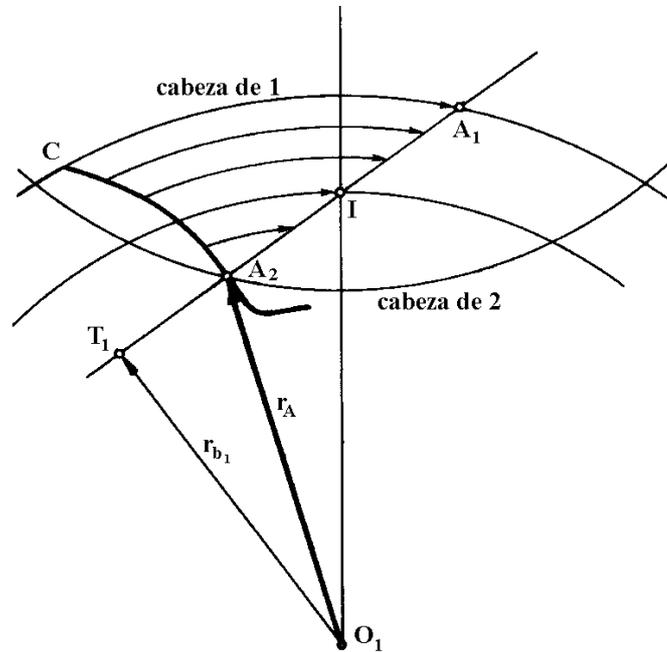


Fig. II-45 Zona activa del perfil del diente

El radio mínimo de la zona activa será:

$$r_A = \sqrt{r_{b1}^2 + \overline{T_1A_2}^2} \quad (\text{II-82})$$

Siendo:

$$\overline{T_1A_2} = \overline{IT_1} - \overline{IA_2} \quad (\text{II-83})$$

$$\overline{IT_1} = r_{b1} \cdot \text{tg } \alpha \quad (\text{II-84})$$

$$\overline{IA_2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - r_{b2} \cdot \text{tg } \alpha \quad (\text{II-85})$$

II.4.2.2 - Interferencia y socavación

La distancia entre la circunferencia primitiva y la circunferencia base será:

$$r - r_b = r \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (\text{II-86})$$

Cuando una rueda tiene pocos dientes la distancia entre la circunferencia primitiva y la de base se hace muy pequeña pudiendo penetrar la cabeza de la otra rueda por debajo de la circunferencia base de la rueda pequeña tal como se puede observar en la figura (II-46).

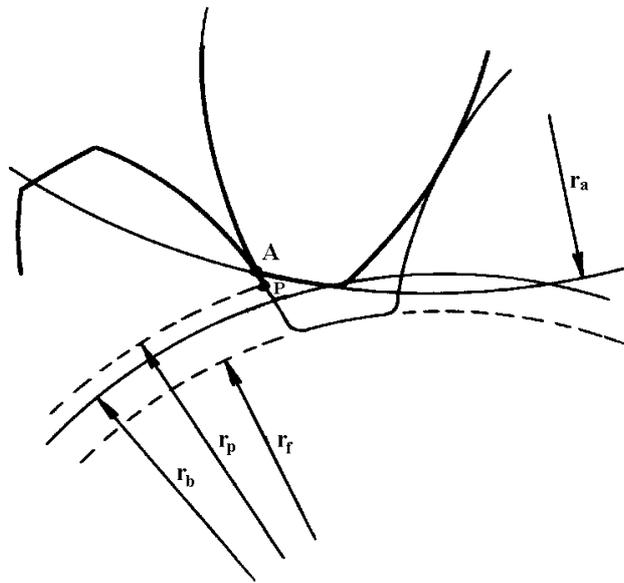


Fig. II-46 La cabeza de los dientes de una rueda pueden penetrar por debajo de la circunferencia base de la otra rueda

Aunque la circunferencia de cabeza de una rueda penetre por debajo de la circunferencia base de la otra rueda, no habrá problemas de interferencia o socavación siempre que se cumpla que el radio mínimo de la zona activa sea mayor que el radio base, pues en este caso el contacto se producirá siempre entre perfiles de evolvente.

Si engrana una rueda con una cremallera el radio de pie " r_p " deberá ser mayor que el radio de base.

El problema de interferencia o socavación aparecerá cuando el contacto se intente producir por debajo de la circunferencia base. En este caso, tal como se aprecia en la figura (II-47), la trayectoria del punto de contacto, punto "C", al ser el punto "I" centro instantáneo de rotación relativo, intenta penetrar en el diente de la otra rueda produciendo la interferencia y si el punto "C" fuese de la herramienta, produciría la socavación.

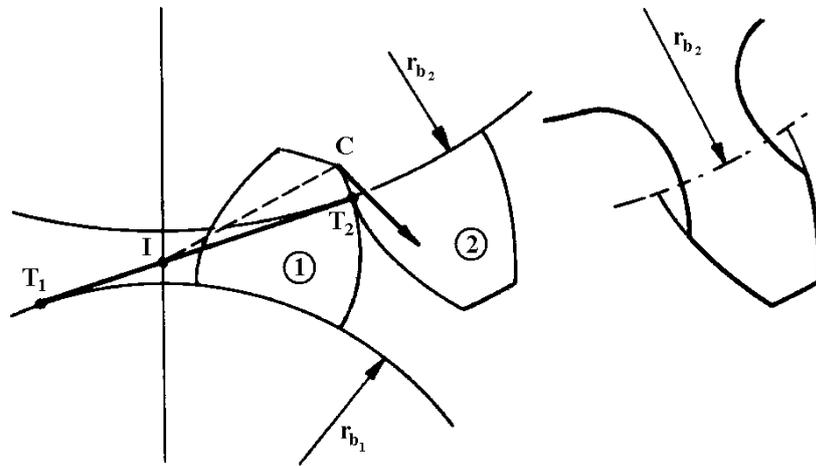


Fig. II-47 Interferencia y socavación

En la figura (II-47) se aprecia que cuando se produce socavación queda debilitado el pie del diente con lo queda reducida su resistencia.

Además al producirse socavación se elimina parte del perfil de evolvente por encima de la circunferencia base. Esto es debido, según se observa en la figura (II-48), a que a partir del punto "T₂" el perfil de evolvente de la rueda "1" es conjugado de la otra rama de evolvente de la rueda "2" y como el radio de curvatura de la otra rama de evolvente es "T₂P" y el del perfil del diente "T₁P", resulta que el perfil del diente de la rueda "1" penetra en el perfil del diente de la rueda "2" por encima de su circunferencia base.

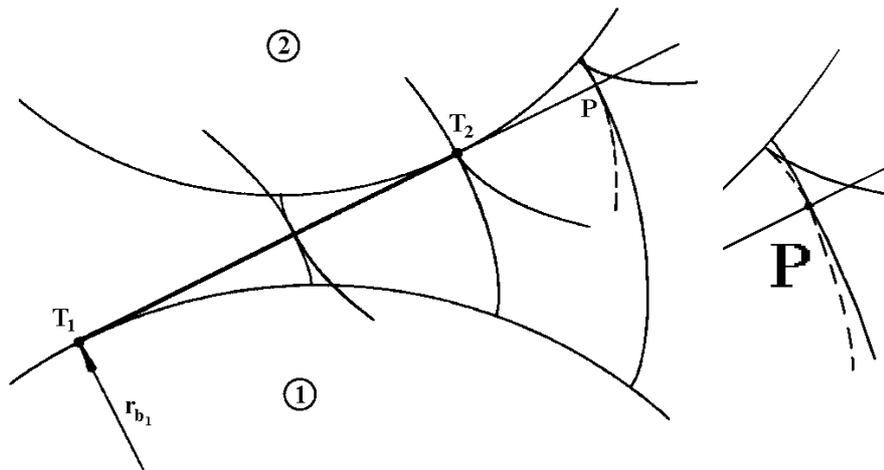


Fig. II-48 En el punto "P", el perfil del diente es conjugado de la otra rama de evolvente

Según se observa en las figuras (II-47) y (II-48), para que no le produzca interferencia o socavación la rueda "1" a la "2", la circunferencia de cabeza de la rueda "1" no debe pasar más allá del punto "T₂".

En la figura (II-49) se representa el radio máximo de cabeza de la rueda "1" para que no le produzca interferencia o socavación a la rueda "2".

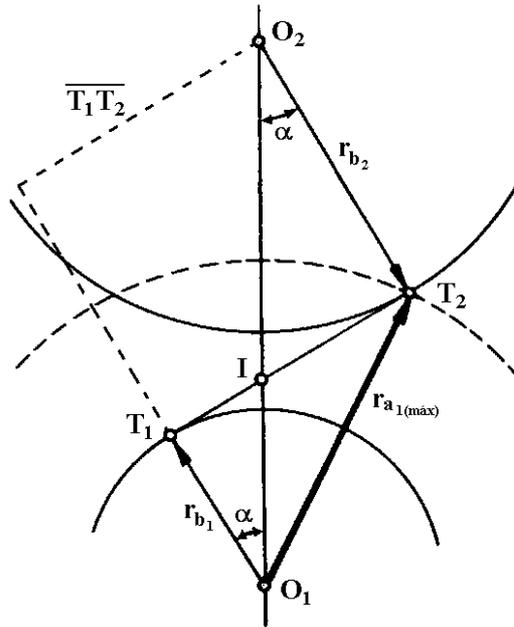


Fig. II-49 Radio máximo de cabeza de la rueda "1"

$$r_{a1(\text{máx})} = \sqrt{r_{b1}^2 + \overline{T_1T_2}^2} \quad (\text{II-87})$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mu = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} = \frac{z_1}{z_2} \quad (\text{II-88})$$

$$\overline{T_1T_2} = (r_{b1} + r_{b2}) \cdot \text{tg } \alpha \quad (\text{II-89})$$

$$\overline{T_1T_2} = r_{b1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \cdot \text{tg } \alpha = r_{b1} \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1} \right) \cdot \text{tg } \alpha \quad (\text{II-90})$$

Resulta

$$r_{a1(\text{máx})} = r_{b1} \sqrt{1 + \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\text{II-91})$$

La interferencia o socavación de una cremallera a una rueda dentada se producirá si la cresta de la cremallera va más allá del punto "T₂", por lo tanto el máximo de la altura de cabeza de la cremallera será tal que la cresta de la cremallera pase por dicho punto "T₂" como se aprecia en la figura (II-50).

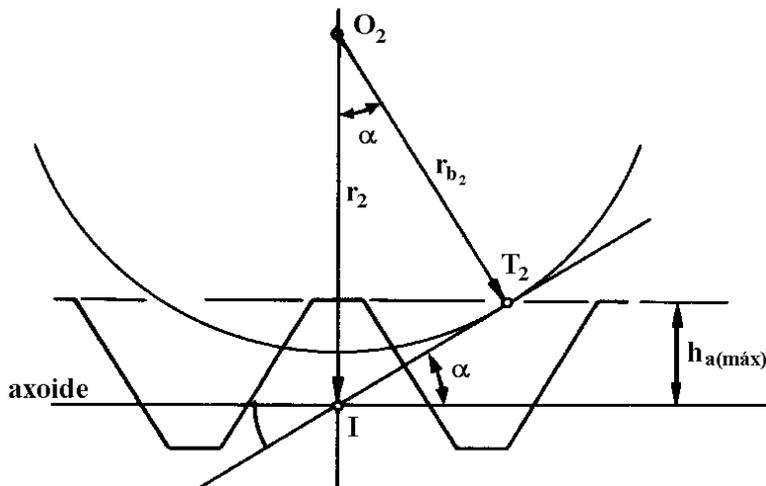


Fig. II-50 Altura máxima de cabeza de la cremallera

$$h_{a(\text{máx})} = \overline{IT_2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = r_2 \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (\text{II-92})$$

Para evitar la interferencia o socavación se debe alejar el punto "T₂" o disminuir la altura de cabeza, para ello se suelen utilizar los siguientes métodos:

- Aumentar el número de dientes de la rueda pequeña.
- Aumentar el ángulo de presión.
- Utilizar dientes cortos.
- Aumentar el espesor del diente desplazando la herramienta de generación.

Este último método es el más utilizado, ya que no precisa herramientas especiales.

II.4.2.3 - Radio de apuntamiento

Al desplazar la herramienta para evitar la socavación al generar la rueda dentada, se puede llegar a que la cabeza del diente se reduzca a un punto como se observa en la figura (II-51), poniendo límite al desplazamiento.

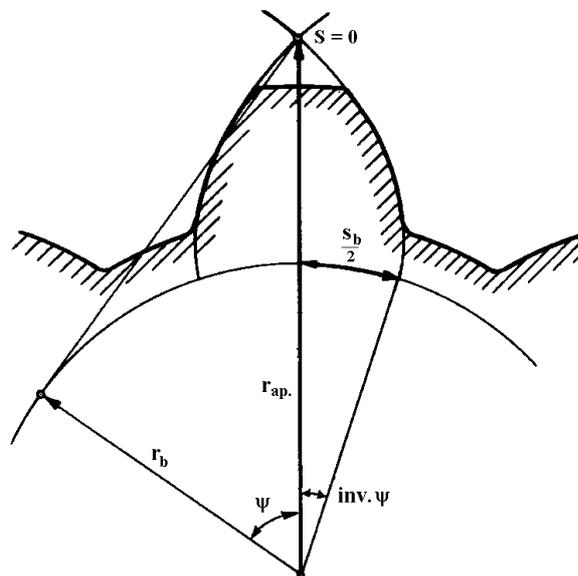


Fig. II-51 Radio de apuntamiento

En el apuntamiento el espesor del diente se hace cero, por lo tanto

$$s = \frac{s_b - 2r_b \text{inv.}\psi}{\cos \psi} = 0 \quad (\text{II-93})$$

Para que el espesor sea cero se debe anular el numerador

$$s_b - 2r_b \text{inv.}\psi = 0 \quad (\text{II-94})$$

De la ecuación (II-94) se obtiene

$$\text{inv.}\psi = \frac{s_b}{2r_b} \quad (\text{II-95})$$

Y en la figura (II-51) se aprecia que el radio de apuntamiento será:

$$r_{ap} = \frac{r_b}{\cos \psi} \quad (\text{II-96})$$

En las figuras (II-52) y (II-53) se pueden apreciar ruedas de pocos dientes en las que se ha evitado la socavación a base de desplazar la herramienta de tallado hasta llegar al apuntamiento de los dientes.

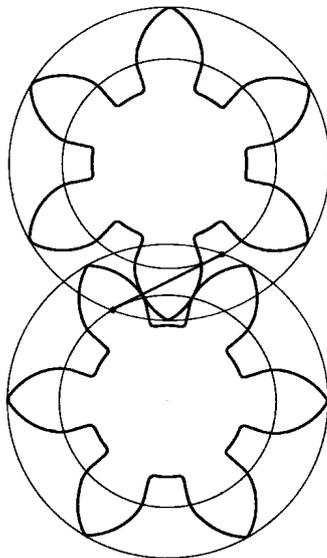


Fig. II-52 Ejemplo de ruedas de 6 dientes

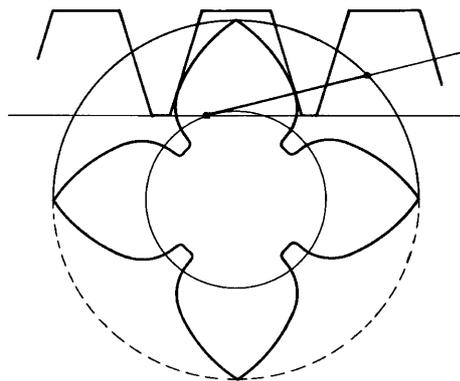


Fig. II-53 Ejemplo de rueda de 4 dientes y cremallera

II.5 - TALLADO DE RUEDAS DENTADAS

Las formas más comunes de tallar ruedas dentadas son las siguientes:

- Con fresa de forma.
- Por generación.

II.5.1 - Tallado con fresa de forma

Este tallado se hace mediante una fresa cuya sección coincide con la forma del hueco entre dientes, (Fig. II-54).

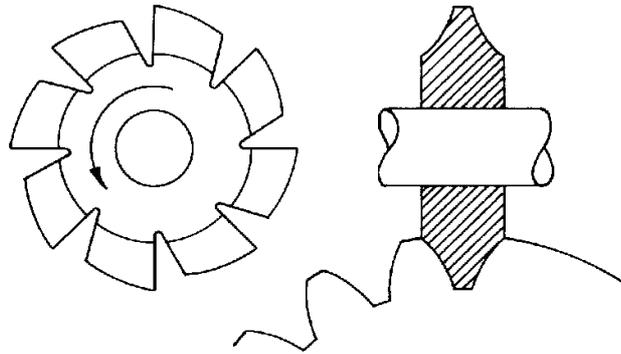


Fig. II-54 Tallado con fresa de forma

El hueco entre dientes varía con el número de dientes de la rueda, por lo tanto serían necesarias infinitas fresas para cada módulo. En la práctica se utilizan 8 fresas para cada módulo, sirviendo cada fresa para una gama de números de dientes. De aquí se desprende que este tallado no es de mucha precisión.

II.5.2 - Tallado por generación

En el tallado por generación, si elimina el movimiento de corte de la herramienta, resulta que los movimientos de la rueda a tallar y el de la herramienta son los mismos que si estuviesen engranando entre ellas.

La máquina de tallado, además de proporcionar el movimiento de corte a la herramienta, sincroniza los movimientos de engrane entre la pieza y la herramienta.

Hay varios tipos de tallado por generación como son:

- Por cremallera, (Fig. II-55).
- Por medio de piñón cortador, (Fig. II-56).
- Por fresa madre, (Fig. II-57).

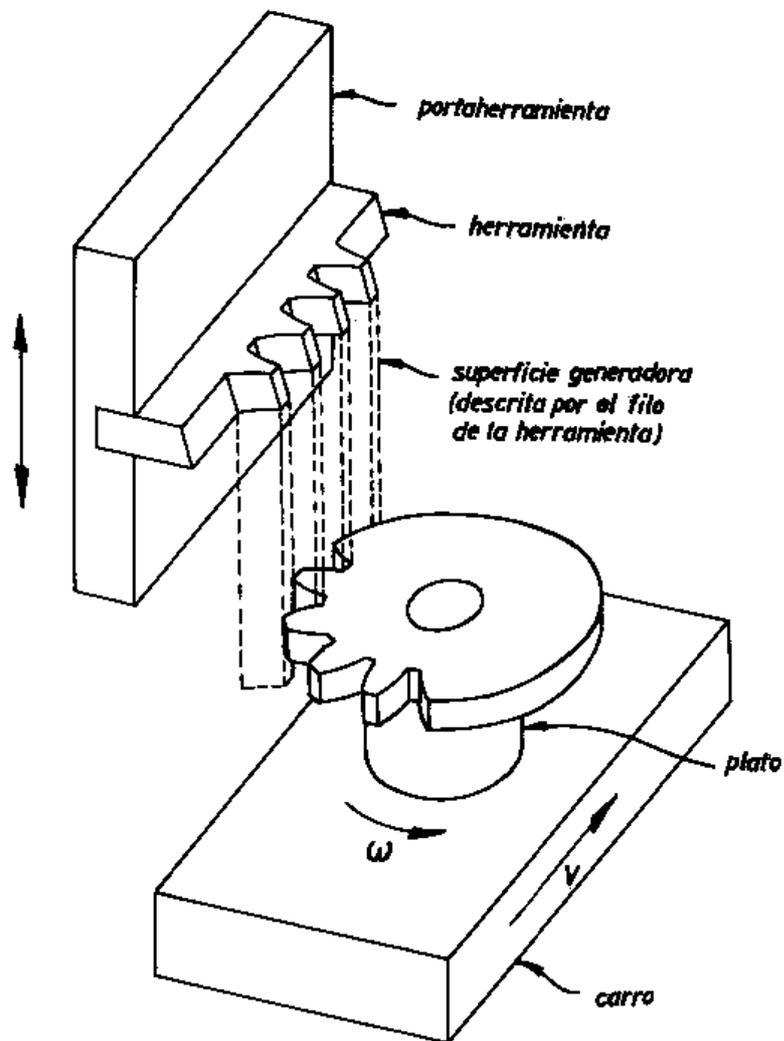


Fig. II-55 Tallado con cremallera

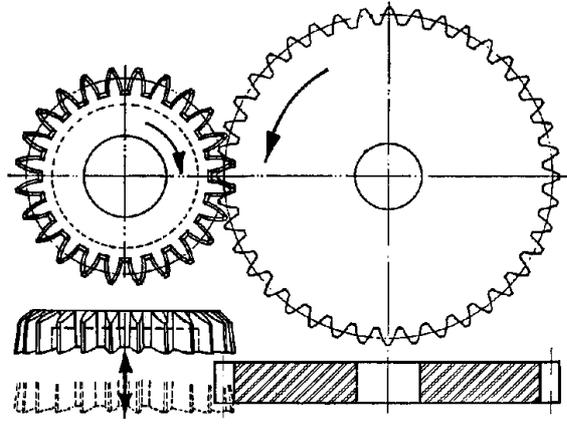


Fig. II-56 Tallado con piñón cortador

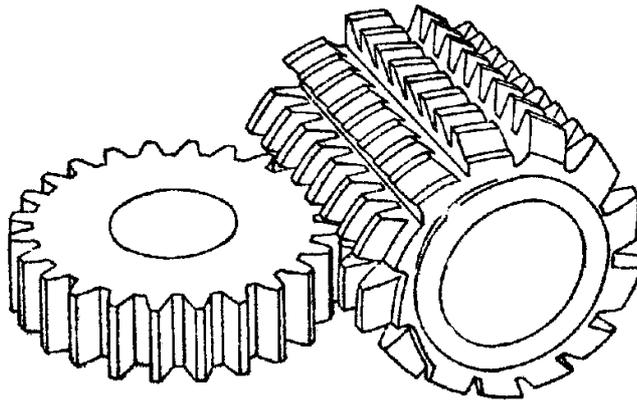


Fig. II-57 Tallado con fresa madre

En los tipos de tallado anteriores, las diferentes posiciones relativas del diente de la herramienta van generando el perfil del diente de la rueda a tallar, tal como se observa en la figura (II-58).

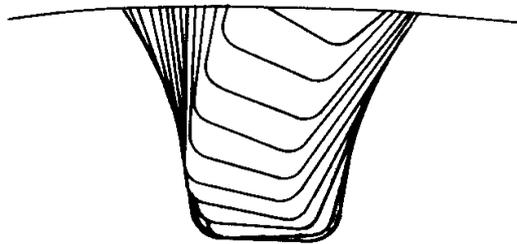


Fig. II-58 Cortes sucesivos de la herramienta en el hueco del diente

II.5.2.1 - Cremallera herramienta

En los tallados por generación por medio de cremallera-herramienta o fresa madre, la sección de corte de la herramienta es una cremallera tal como se observa en la figura (II-59).

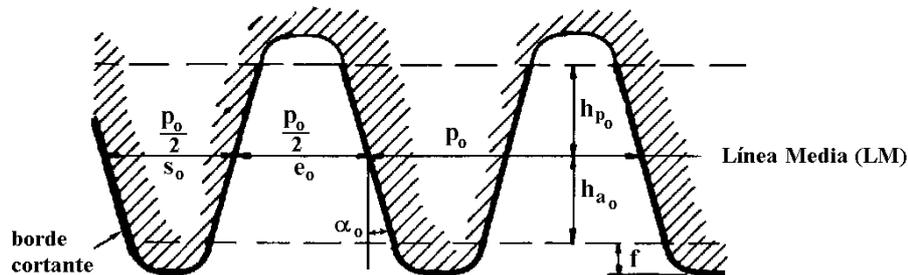


Fig. II-59 Herramienta cremallera

Los datos intrínsecos de la cremallera herramienta son los siguientes:

- Ángulo de empuje α_0
- Paso p_0
- Altura de cabeza h_{a_0}
- Altura de pie h_{p_0}
- Suplemento de cabeza f

Los subíndices "0" indican que los valores se refieren a la herramienta o a la generación.

Las dimensiones normalizadas para la cremallera herramienta son las siguientes:

<u>Normal</u>	<u>Rebajada o diente corto</u>
$\alpha_0 = 20^\circ$	$\alpha_0 = 20^\circ$
$p_0 = \pi \cdot m_0$	$p_0 = \pi \cdot m_0$
$h_{a_0} = m_0$	$h_{a_0} = 0.75 \cdot m_0$
$h_{p_0} = m_0$	$h_{p_0} = 0.75 \cdot m_0$
$f = 0.25 \cdot m_0$	$f = 0.25 \cdot m_0$

II.5.2.2 - Sincronización de los movimientos de la rueda y de la herramienta

La máquina de tallar ruedas dentadas debe sincronizar los movimientos de giro de la rueda a tallar y el desplazamiento lateral bien sea de la pieza o de la cremallera. Por tanto se debe cumplir:

$$r_0 = \frac{v}{\omega} \quad (\text{II-97})$$

Siendo:

- r_0 = radio primitivo de generación de la rueda.
- v = velocidad de desplazamiento de la rueda o de la herramienta.
- ω = velocidad angular de la rueda.

En las máquinas de tallar engranajes por medio de fresa madre, la sincronización citada se consigue haciendo que la fresa madre gire tantas vueltas como dientes tiene la rueda a dentar por cada vuelta de giro de dicha rueda.

La longitud de la circunferencia primitiva de generación debe ser igual al paso primitivo de generación por el número de dientes, por tanto se cumplirá:

$$r_0 = \frac{p_0 \cdot z}{2\pi} = \frac{m_0 \cdot z}{2} \quad (\text{II-98})$$

II.5.2.3 - Parámetros de generación

Al tallar una rueda dentada se puede hacer que la línea media de la cremallera herramienta coincida o no con el axoide de la cremallera, tal como se observa en la figura (II-60). El desplazamiento de la herramienta se suele expresar en módulos. Los axoides de generación quedan definidos por los movimientos de giro de la rueda y de traslación de la rueda o de la herramienta según las ecuaciones (II-97) y (II-98).

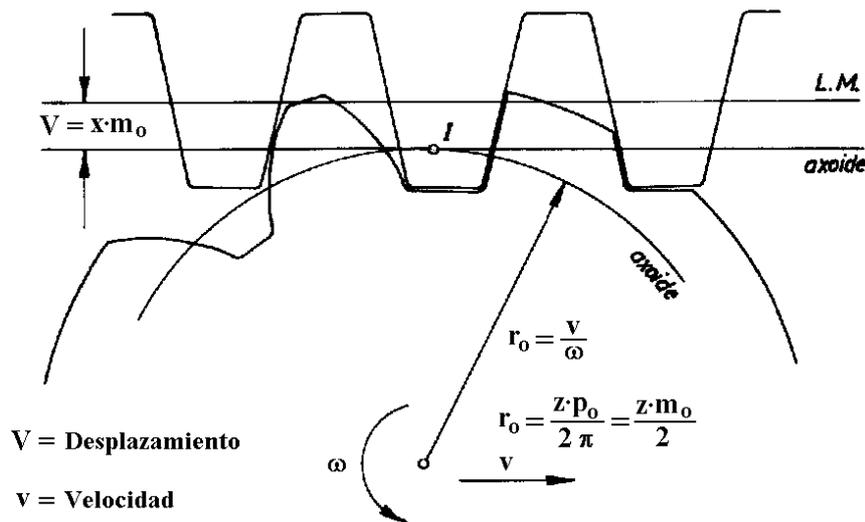


Fig. II-60 Axoides de generación, línea media de la cremallera y desplazamiento

Los datos de generación de una rueda dentada serán: Los datos intrínsecos de la cremallera (α_0 , p_0 , h_{a_0} , h_{p_0} y f), el radio de generación de la rueda " r_0 " y el desplazamiento de la herramienta " V ".

Según sea el desplazamiento de la herramienta negativo, nulo o positivo se obtienen diferentes perfiles de los dientes tal como se observa en la figura (II-61).

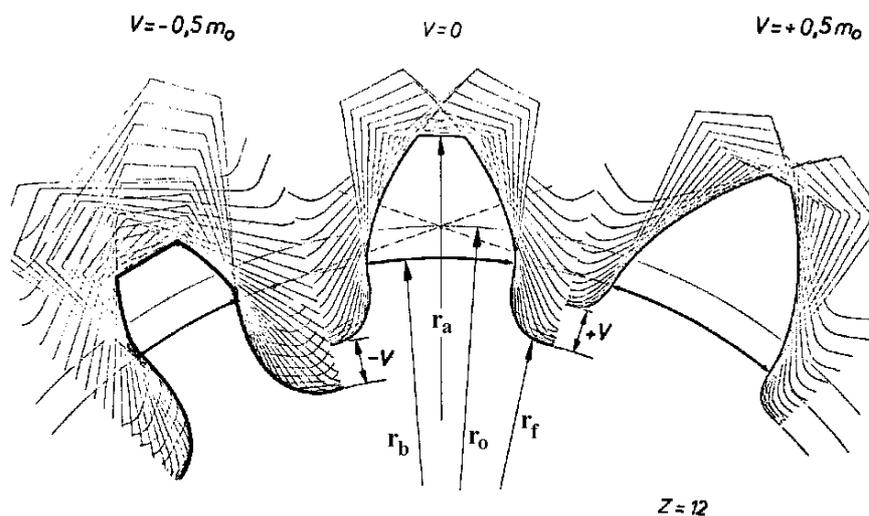


Fig. II-61 Dientes obtenidos con diferentes desplazamientos de la herramienta

II.5.3 - Cálculo de datos intrínsecos

A partir de los datos de generación se obtendrán en la rueda dentada unos datos de funcionamiento que se pueden deducir de la figura (II-62).

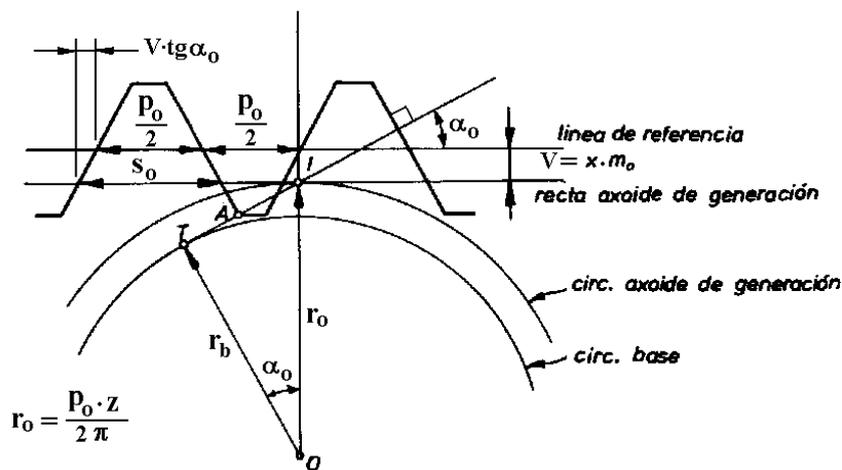


Fig. II-62 Engrane de rueda y cremallera con desplazamiento

Para determinar los datos intrínsecos de la rueda generada, en la figura (II-62) se observa que:

$$r_b = r_0 \cdot \cos \alpha_0 \quad (\text{II-99})$$

Y por tanto:

$$p_b = p_0 \cdot \cos \alpha_0 \quad (\text{II-100})$$

$$m_b = m_0 \cdot \cos \alpha_0 \quad (\text{II-101})$$

También se observa que:

$$s_0 = \frac{p_0}{2} + 2V \cdot \text{tg } \alpha_0 \quad (\text{II-102})$$

Siendo "s₀" espesor del hueco de la cremallera medida sobre la recta axoide y que, como la generación es similar a un engrane sin holgura, coincide con el espesor del diente de la rueda "s₀" medida sobre la circunferencia primitiva de generación.

Teniendo en cuenta la ecuación (II-55) que relaciona los espesores del diente medidos sobre las circunferencias base y primitiva, se tendrá:

$$s_0 = \frac{s_b - 2r_b \text{inv.} \alpha_0}{\cos \alpha_0} = \frac{s_b}{\cos \alpha_0} - 2r_0 \text{inv.} \alpha_0 \quad (\text{II-103})$$

Despejando "s_b" y sustituyendo "s₀" según la ecuación (II-102), se obtiene:

$$s_b = \left(\frac{p_0}{2} + 2V \text{tg } \alpha_0 + 2r_0 \text{inv.} \alpha_0 \right) \cdot \cos \alpha_0 \quad (\text{II-104})$$

El radio de pie "r_p" de la rueda es el radio del punto más bajo del diente que contacta con el diente de la cremallera herramienta, sin tener en cuenta el suplemento de cabeza "f".

Según se aprecia en la figura (II-62), el radio de pie será la distancia "OA", y su valor será:

$$r_p = \sqrt{(\text{OT})^2 + (\text{AT})^2} \quad (\text{II-105})$$

Y como

$$OT = r_0 \cos \alpha_0 \quad (\text{II-106})$$

$$AT = TI - AI \quad (\text{II-107})$$

$$TI = r_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \quad (\text{II-108})$$

$$AI = \frac{h_{a_0} - V}{\operatorname{sen} \alpha_0} \quad (\text{II-109})$$

Resulta:

$$r_p = \sqrt{(r_0 \cos \alpha_0)^2 + \left(r_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{h_{a_0} - V}{\operatorname{sen} \alpha_0} \right)^2} \quad (\text{II-110})$$

El radio de fondo de la rueda "r_f" será:

$$r_f = r_0 + V - h_{a_0} - f \quad (\text{II-111})$$

Y el radio de cabeza de la rueda "r_a" será:

$$r_a \leq r_0 + V + h_{p_0} \quad (\text{II-112})$$

Recopilando, los datos intrínsecos de la rueda serán:

Radio base	$r_b = r_0 \cdot \cos \alpha_0$
Paso base	$p_b = p_0 \cdot \cos \alpha_0$
Módulo base	$m_b = m_0 \cdot \cos \alpha_0$
Espesor base	$s_b = \left(\frac{p_0}{2} + 2V \operatorname{tg} \alpha_0 + 2r_0 \operatorname{inv} . \alpha_0 \right) \cdot \cos \alpha_0$
Radio de cabeza	$r_a \leq r_0 + V + h_{p_0}$
Radio de pie	$r_p = \sqrt{(r_0 \cos \alpha_0)^2 + \left(r_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{h_{a_0} - V}{\operatorname{sen} \alpha_0} \right)^2}$
Radio de fondo	$r_f = r_0 + V - h_{a_0} - f$

II.5.4 - Cálculo de datos de funcionamiento

Si se tiene engranadas dos ruedas dentadas totalmente normales, sus dimensiones serán las que se han expuesto en los apartados (II.3.7) y (II.3.8).

Dos ruedas engranadas serán normales cuando se generen haciendo coincidir la línea media de la cremallera herramienta con el axoide de la cremallera y además se engranen sin holgura.

Si se engranan dos ruedas en la que alguna de las dos se ha generado aplicando un determinado desplazamiento a la herramienta o si se engranan con holgura, las dimensiones de las ruedas ya no se pueden calcular según los apartados (II.3.7) y (II.3.8). En este caso, con los datos de generación se determinan los datos intrínsecos de cada rueda, y con éstos y la holgura de montaje se determinan los datos de funcionamiento.

En la figura (II-63) se aprecia como varía la distancia entre centros mínima a que pueden engranar dos ruedas dentadas generadas con desplazamiento positivo de la herramienta.

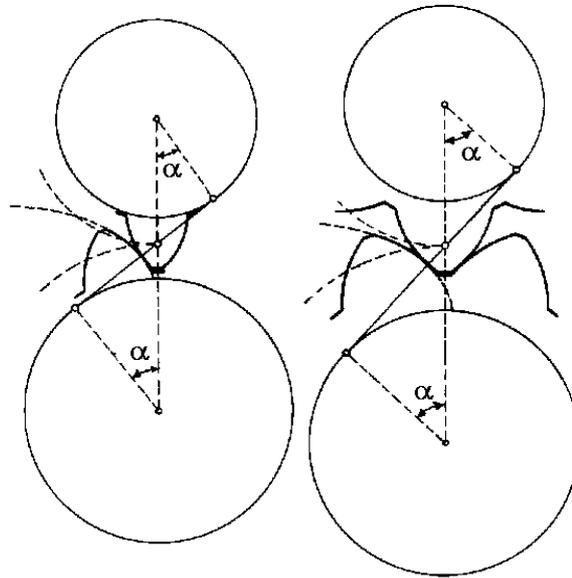


Fig. II-63 Variación de la distancia entre centros de ruedas generadas con desplazamiento positivo.

II.5.4.1 - Engrane de dos ruedas sin holgura

En el apartado (II.3.15) se expuso como serán los datos de funcionamiento de dos ruedas que engranan sin holgura.

Si se sustituye la ecuación (II.104) en la ecuación (II.67) se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{inv.}\alpha_{\min.} = & \frac{\left(\frac{p_0}{2} + 2V_1 \operatorname{tg} \alpha_0 + 2r_{01} \operatorname{inv.}\alpha_0\right) \cos \alpha_0}{2(r_{b1} + r_{b2})} + \\ & + \frac{\left(\frac{p_0}{2} + 2V_2 \operatorname{tg} \alpha_0 + 2r_{02} \operatorname{inv.}\alpha_0\right) \cos \alpha_0 - p_b}{2(r_{b1} + r_{b2})} \end{aligned} \quad (\text{II-113})$$

Operando se obtiene:

$$\text{inv.}\alpha_{\min.} = \text{inv.}\alpha_0 + \frac{V_1 + V_2}{r_{01} + r_{02}} \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (\text{II-114})$$

A partir de la "inv. $\alpha_{\min.}$ " con las ecuaciones (II-68), (II-69) y (II-70) se pueden determinar los radios primitivos y la distancia entre centros para el engrane de dos ruedas sin holgura.

II.5.4.2 - Datos de funcionamiento sin holgura

El ángulo de presión " α " será el dado por la "inv. $\alpha_{\min.}$ ".

Teniendo en cuenta las ecuaciones (II-46), (II-47) y (II-55) y las ecuaciones (II-99), (II-100) y (II-104), resulta:

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha} = r_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \quad (\text{II-115})$$

$$p = \frac{p_b}{\cos \alpha} = p_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \quad (\text{II-116})$$

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{s_b - 2r_b \operatorname{inv} \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\left(\frac{p_0}{2} + 2V \operatorname{tg} \alpha_0 + 2r_0 \operatorname{inv} \alpha_0 \right) \cos \alpha_0 - 2r_0 \operatorname{inv} \alpha \cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \\
 &= \left(\frac{p_0}{2} + 2V \operatorname{tg} \alpha_0 + 2r_0 \operatorname{inv} \alpha_0 - 2r_0 \operatorname{inv} \alpha \right) \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \quad (\text{II-117})
 \end{aligned}$$

Las alturas de cabeza, de pie y de fondo serán:

$$h_a = r_a - r \quad (\text{II-118})$$

$$h_p = r - r_p \quad (\text{II-119})$$

$$h_f = r - r_f \quad (\text{II-120})$$

II.5.4.3 - Datos de funcionamiento sin holgura y engrane a cero

Cuando dos ruedas dentadas que engranan sin holgura, se generan, una con desplazamiento positivo y la otra con desplazamiento negativo del mismo valor, se produce el "engrane a cero".

$$V_1 + V_2 = 0 \quad (\text{II-121})$$

En este caso, sustituyendo los valores de los desplazamientos en las ecuaciones (II-114), (II-115), (II-116) y (II-117) se obtienen los valores siguientes:

$$\alpha = \alpha_0 \quad (\text{II-122})$$

$$r = r_0 \quad (\text{II-123})$$

$$p = p_0 \quad (\text{II-124})$$

$$s = \frac{p_0}{2} + 2V \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (\text{II-125})$$

La altura de cabeza, para que parte del diente no resulte mecanizado por el fondo de la cremallera-herramienta, deberá ser:

$$h_a \leq h_{p0} + V \quad (\text{II-126})$$

Y la altura de fondo será:

$$h_f = h_{a0} + f - V \quad (\text{II-127})$$

II.5.4.4 - Datos de funcionamiento con holgura

Si dos ruedas dentadas engranan a una distancia entre ejes mayor que la mínima, estas ruedas engranarán con holgura. En este caso, para determinar los datos de funcionamiento se aplican las ecuaciones de la (II-45) a la (II-50).

II.5.5 - Diente socavado en la generación

Tal como se vio en el apartado (II.4.2.2), cuando una rueda dentada tiene pocos dientes, puede aparecer el fenómeno de socavación durante la generación quedando el diente tal como se aprecia en la figura (II-64).

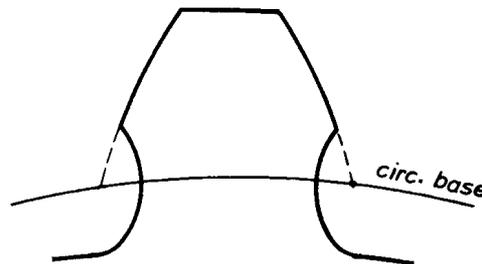


Fig. II-64 Diente socavado durante la generación.

El diente socavado queda muy debilitado en su base, con lo que pierde gran parte de su resistencia, por tanto se debe evitar este fenómeno.

Para evitar la socavación se puede desplazar la herramienta tal como se aprecia en la figura (II-65).

El desplazamiento mínimo para evitar la socavación se dará cuando el punto más alto de la cabeza de la cremallera contacte con el perfil del diente de la rueda en la circunferencia base, es decir, en el punto "T". En este caso el desplazamiento mínimo será:

$$V_{\min.} = h_{a0} - r_0 \text{sen}^2 \alpha_0 \quad (\text{II-128})$$

En la altura de cabeza de la herramienta no se tiene en cuenta el suplemento de cabeza "f" porque este suplemento tiene una forma redondeada que no produce socavación.

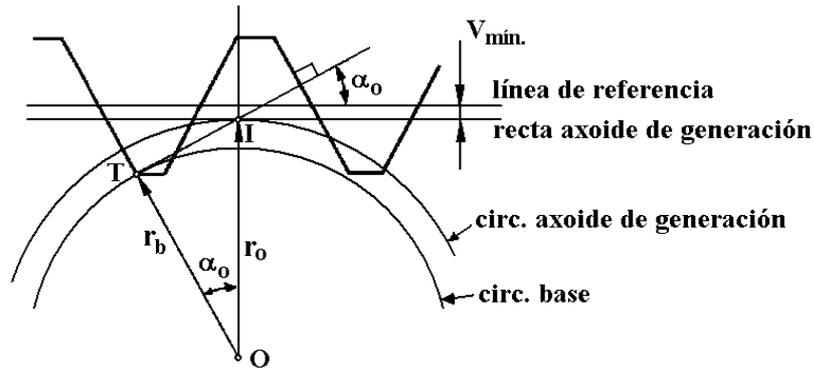


Fig. II-65 Desplazamiento mínimo de la herramienta.

II.5.5.1 - Número mínimo de dientes para que no aparezca socavación

Para que no aparezca socavación durante el tallado de una rueda dentada sin desplazar la herramienta se debe cumplir que el desplazamiento mínimo necesario " V_{\min} ." sea cero. Teniendo en cuenta la ecuación (II-128) se cumplirá:

$$h_{a_0} - r_o \operatorname{sen}^2 \alpha_0 = 0 \quad (\text{II-129})$$

Sustituyendo " r_o " según la ecuación (II-98) se tendrá:

$$\frac{m_0 z}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha_0 = h_{a_0} \quad (\text{II-130})$$

Despejando el número de dientes se tendrá:

$$z = \frac{2h_{a_0}}{\operatorname{sen}^2 \alpha_0 m_0} \quad (\text{II-131})$$

Para un ángulo de presión de 20° , que es el más normal en la actualidad, y para cremalleras-herramienta de diente normal y diente corto se tendrán los números de dientes mínimos siguientes:

$\alpha_0 = 20^\circ$	$h_{a0} = m_0$	$z > 17.1$ dientes
$\alpha_0 = 20^\circ$	$h_{a0} = 0.75m_0$	$z > 12.8$ dientes

II.5.6 - Fuerzas en los engranajes rectos

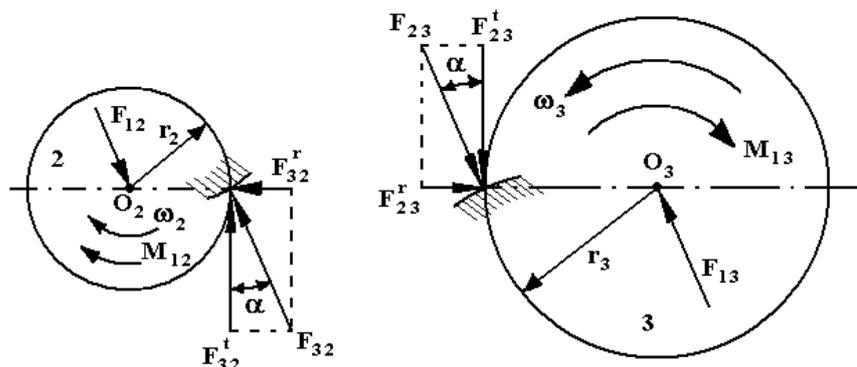


Fig. II-66 Diagrama de cuerpo libre de las ruedas dentadas.

La fuerza que aparece entre los dientes de las ruedas dentadas, si se desprecia el rozamiento, es perpendicular a la tangente a los perfiles de los dientes en el punto de contacto. Esta fuerza forma un ángulo "α" con la tangente a la circunferencia primitiva.

La componente de la fuerza que contribuye a la transmisión de potencia es la tangencial, por tanto se tendrá:

$$F^t = \frac{W}{V} \tag{II-132}$$

Siendo:

- W = Potencia en vatios.
- V = Velocidad de un punto de la circunferencia primitiva en m/s.

$$|F_{23}^t| = |F_{32}^t| \tag{II-133}$$

$$F^r = F^t \operatorname{tg} \alpha \tag{II-134}$$

Engranajes

$$|\mathbf{F}_{23}^r| = |\mathbf{F}_{32}^r| \quad (\text{II-135})$$

$$F = \sqrt{F^t{}^2 + F^r{}^2} \quad (\text{II-136})$$

$$|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{32}| = |\mathbf{F}_{23}| = |\mathbf{F}_{13}| \quad (\text{II-137})$$

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{F}_{32}^t \cdot \mathbf{r}_2 \quad (\text{II-138})$$

$$\mathbf{M}_{13} = \mathbf{F}_{23}^t \cdot \mathbf{r}_3 \quad (\text{II-139})$$

II.6 - ENGRANAJES HELICOIDALES

En un engranaje formado por ruedas dentadas rectas, el inicio del engrane de un diente se produce al mismo tiempo en toda su longitud. Si los dientes tienen algo de error de mecanizado o algo de deformación debida a las fuerzas que transmiten, se producirá un choque al iniciar el engrane de un diente generando ruido y vibraciones.

En los engranajes formados por ruedas helicoidales, el engrane de un diente se produce de forma progresiva, disminuyendo la producción de ruido y vibraciones respecto de los engranajes rectos.

En los engranajes helicoidales aparecen unas fuerzas axiales que no aparecen en los rectos, aunque estas fuerzas no son mayor inconveniente si se colocan unos rodamientos adecuados en los ejes.

II.6.1 - Forma de los dientes

Una rueda dentada helicoidal se puede considerar como el límite de una serie de ruedas dentadas rectas escalonadas tal como se aprecia en la figura (II-67).

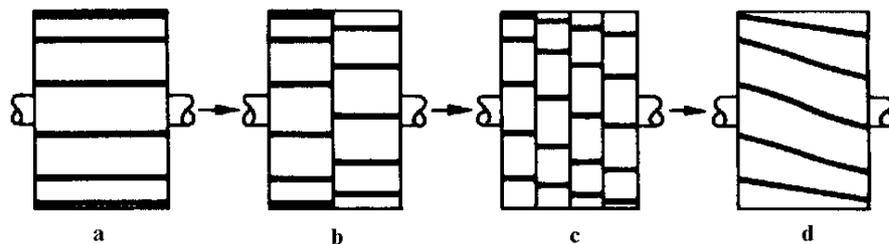


Fig. II-67 Rueda helicoidal como límite de una serie de ruedas rectas escalonadas

La sección de una rueda helicoidal por un plano perpendicular al eje tiene la misma forma que la sección de una rueda recta. Éste es el perfil frontal o perfil tangencial de la rueda helicoidal.

En la figura (II-68) se puede apreciar diferentes secciones de la rueda y las hélices que forman los dientes sobre el cilindro de cabeza y sobre el cilindro de base. La hélice sobre el cilindro de base forma un ángulo con la generatriz " β_b ".

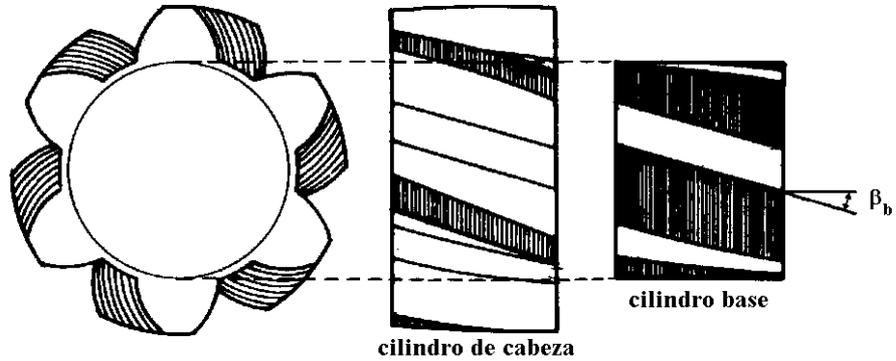


Fig. II-68 Secciones de la rueda y hélices sobre los cilindros de cabeza y de base

La forma de los flancos de los dientes es una superficie reglada llamada helicoide reglado. Esta superficie se obtiene por medio de una recta oblicua en el plano "ABCD" que se desenrolla o rueda sin deslizamiento sobre el cilindro de base, figura (II-69). El ángulo entre la recta oblicua y las generatrices del cilindro base es el ángulo de la hélice en la base " β_b ". Las secciones del helicoide reglado por planos tangentes al cilindro base son líneas rectas. Cada punto de la recta oblicua describe una evolvente, de este modo, las secciones de los dientes por planos perpendiculares al eje de la rueda tienen sus flancos con perfil de evolvente.

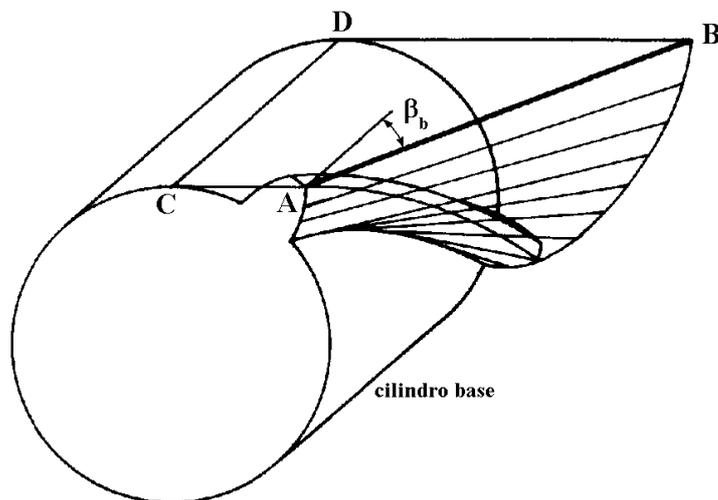


Fig. II-69 Helicoide reglado

II.6.2 - Engrane de dos ruedas helicoidales

Las dos ruedas que forman un engranaje helicoidal que transmita el movimiento entre ejes paralelos (engranaje cilíndrico) deben tener la misma inclinación de la hélice sobre el cilindro base pero sentidos contrarios, es decir, una hélice a derechas y otra a izquierdas, figura (II-70).

$$\beta_{b1} = - \beta_{b2} \quad (II-140)$$

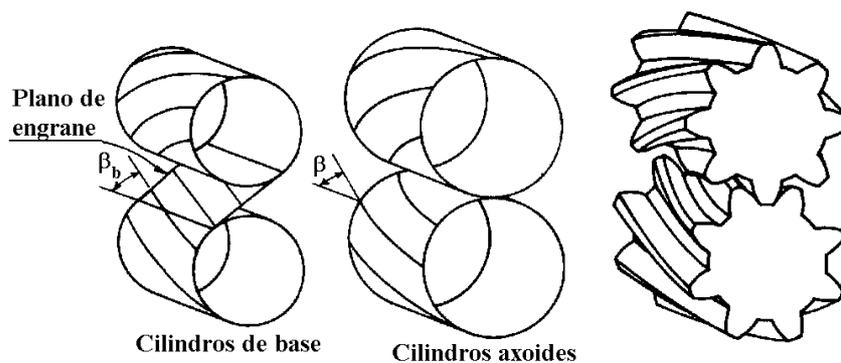


Fig. II-70 Hélices sobre los cilindros base y axoides y dentado de las ruedas

Cada rebanada de las ruedas helicoidales, perpendicular a los ejes de las ruedas y de espesor diferencial, engranan como dos ruedas rectas cuyos perfiles sean los perfiles frontales de las helicoidales. El ángulo de presión (ángulo de presión frontal o tangencial) " α_t " con que engranan estas rebanadas será:

$$\cos \alpha_t = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{a} \quad (II-141)$$

Y los radios primitivos serán:

$$r_1 = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_t} \quad (II-142)$$

$$r_2 = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_t} \quad (II-143)$$

Los flancos de los dientes sobre los cilindros axoides también forman unas hélices cuyo ángulo de inclinación respecto de las generatrices es " β ".

II.6.3 - Relación entre ángulos de las hélices base y primitiva

Se llama paso helicoidal " p_z " de una hélice al avance axial correspondiente a una vuelta completa de la hélice. Todos los puntos del diente tienen el mismo paso helicoidal. En la figura (II-71) se representan los desarrollos de los cilindros de base y primitivo de una rueda helicoidal en los que se aprecia la diferencia entre los ángulos de las hélices sobre los cilindros de base y primitivo.

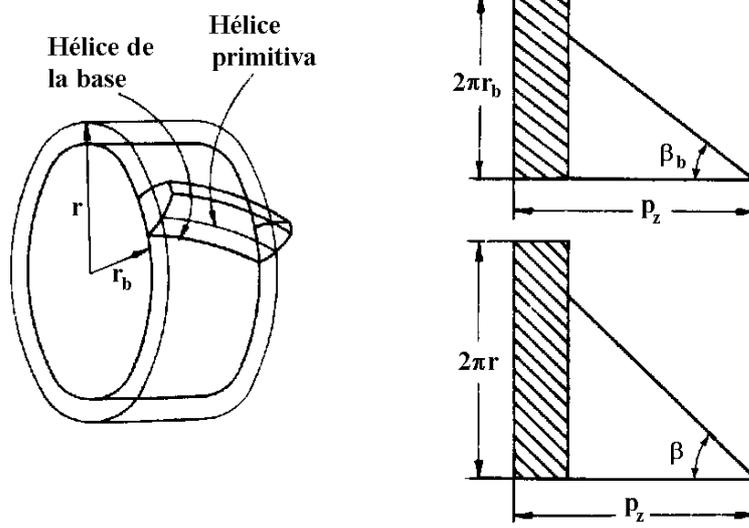


Fig. II-71 Desarrollo de los cilindros base y primitivo

En la figura (II-71) se observa que:

$$\operatorname{tg} \beta_b = \frac{2\pi r_b}{p_z} \quad (\text{II-144})$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\pi r}{p_z} \quad (\text{II-145})$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (II-142) ó (II-143) resulta:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_b}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{r_b}{r} = \cos \alpha_t \quad (\text{II-146})$$

II.6.5 - Cremallera helicoidal

Una cremallera es una rueda dentada de radio infinito, por lo tanto, el cilindro primitivo es un plano. Una cremallera helicoidal será una cremallera de dientes inclinados respecto a sus laterales. El ángulo de inclinación de cualquier arista de la cremallera respecto de una dirección transversal será " β ". Los flancos de los dientes son planos igual que en la cremallera recta.

En una cremallera helicoidal se pueden distinguir dos perfiles, tal como se observa en la figura (II-72): El perfil frontal o tangencial que es el perfil de la cremallera visto en sus laterales y el perfil normal que es perfil de cremallera visto en un plano perpendicular a los dientes. El ángulo entre estos dos perfiles es " β ".

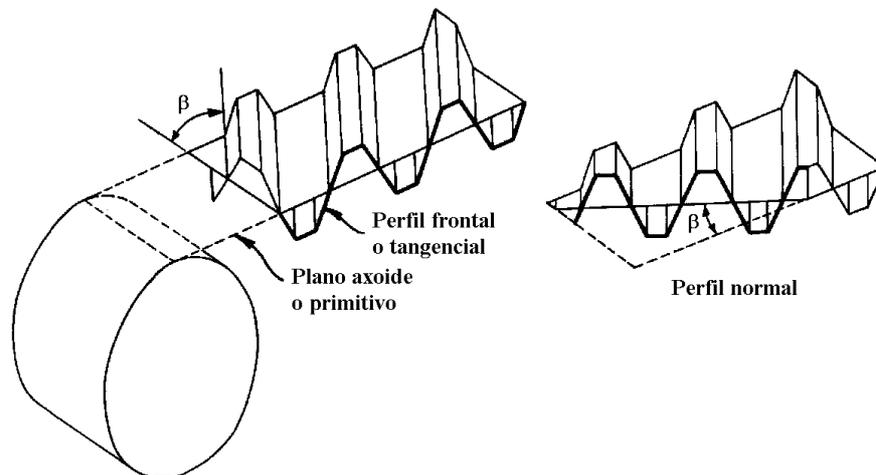


Fig. II-72 Perfiles tangencial y normal de una cremallera helicoidal

En el perfil tangencial se tiene los siguientes datos:

- Ángulo de presión tangencial α_t
- Paso tangencial p_t
- Altura de cabeza h_a

En el perfil normal se tiene los datos siguientes:

- Ángulo de presión normal α_n

- Paso normal p_n
- Altura de cabeza h_a

II.6.6 - Relación entre perfil tangencial y perfil normal

En la figura (II-73) se representa una cremallera con su plano de referencia y cortada por un plano tangencial y uno normal. Se comprueba fácilmente que en las dos secciones la altura de cabeza " h_a " es la misma.

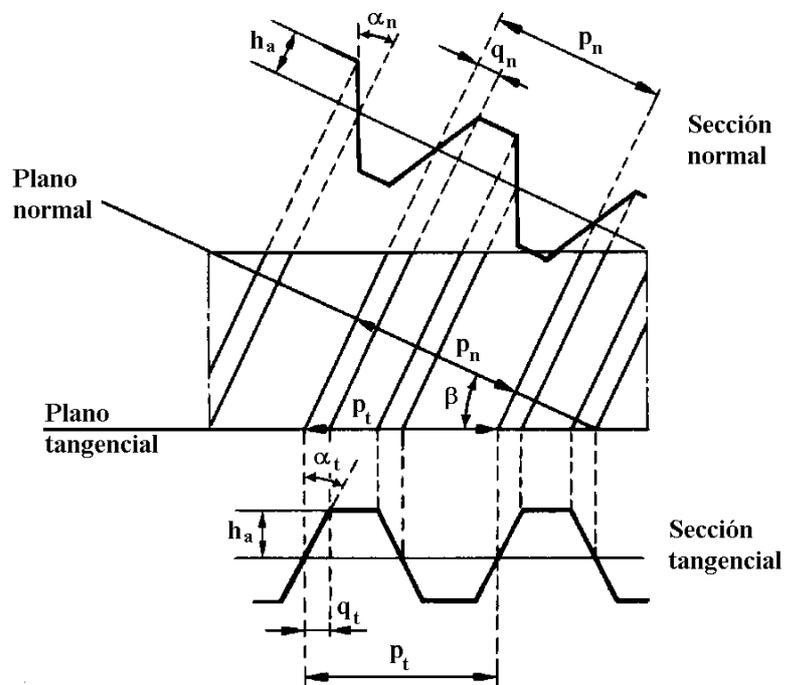


Fig. II-73 Relación entre perfiles tangencial y normal

En la figura (II-73) se observa que:

$$p_n = p_t \cdot \cos \beta \quad (\text{II-147})$$

$$q_n = q_t \cdot \cos \beta \quad (\text{II-148})$$

$$q_n = h_a \cdot \operatorname{tg} \alpha_n \quad (\text{II-149})$$

$$q_t = h_a \cdot \operatorname{tg} \alpha_t \quad (\text{II-150})$$

De las ecuaciones (II-148), (II-149) y (II-150) se obtiene que:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta \quad (\text{II-151})$$

La misma relación que existe entre los pasos normal y tangencial también se da entre los módulos respectivos, resultando:

$$m_n = m_t \cdot \cos \beta \quad (\text{II-152})$$

II.6.7 - Coeficiente de recubrimiento

Se llama salto de base " g_β " de un diente helicoidal al arco que avanza un extremo del diente respecto del otro extremo, medido sobre el cilindro base, figura (II-74).

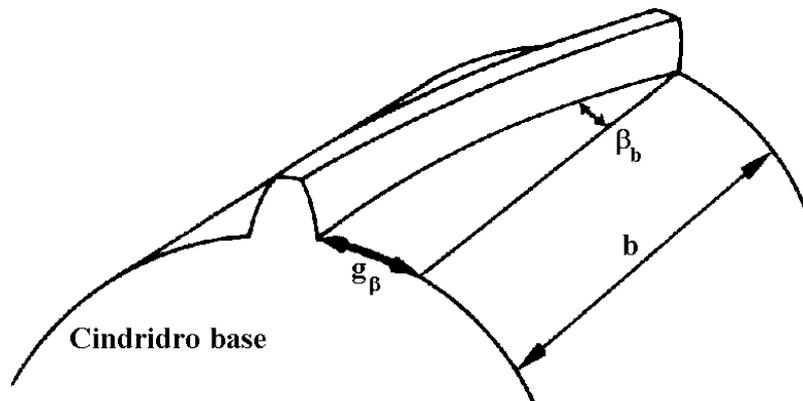


Fig. II-74 Salto de base de un diente helicoidal

De la figura se desprende que:

$$g_\beta = b \cdot \operatorname{tg} \beta_b \quad (\text{II-153})$$

El salto de base mejora al coeficiente de recubrimiento en los engranajes helicoidales, ya que el contacto de un diente tendrá una parte correspondiente al perfil del diente y otra debida al salto de base.

El coeficiente de recubrimiento total será la suma del coeficiente correspondiente al perfil del diente más el coeficiente correspondiente al salto de base.

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} \quad (\text{II-154})$$

Siendo:

- ε_{γ} = coeficiente de recubrimiento total.
- ε_{α} = coeficiente de recubrimiento debido al perfil tangencial.
- ε_{β} = coeficiente de recubrimiento debido al salto de base.
- Resultando un coeficiente de recubrimiento total:

$$\varepsilon_{\gamma} = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_t + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_t + b \cdot \operatorname{tg} \beta_b}{p_{bt}} \quad (\text{II-155})$$

II.6.8 - Generación de ruedas helicoidales por cremallera

Las ruedas helicoidales se pueden generar con las mismas herramientas que las ruedas rectas. Para ello basta con inclinar la herramienta un ángulo " β_0 ", figura (II-75).

El perfil de la cremallera-herramienta se convertirá en el perfil normal de la cremallera generadora imaginaria. Durante su generación, la rueda engrana con la cremallera generadora imaginaria, por tanto, en la rueda aparecerán unos perfiles normal y tangencial que serán iguales a los de la cremallera generadora imaginaria.

El ángulo de inclinación de la herramienta " β_0 " será el ángulo de inclinación de la cremallera generadora imaginaria y, por tanto, también será el ángulo de inclinación de la hélice de la rueda medido sobre el cilindro primitivo, resultando:

$$\beta = \beta_0 \quad (\text{II-156})$$

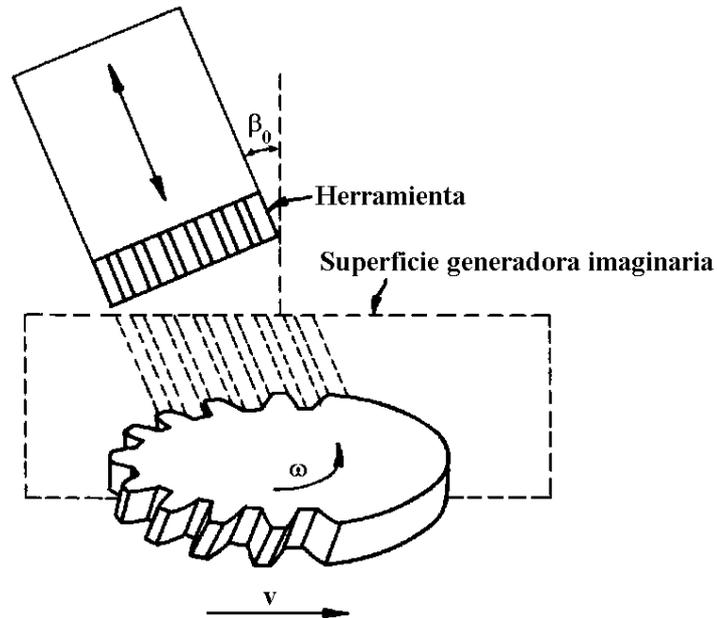


Fig. II-75 Generación de rueda helicoidal por medio de cremallera

Si los datos intrínsecos de la cremallera herramienta son módulo " p_0 ", ángulo de presión " α_0 " y altura de cabeza " h_{a_0} ", estos datos aparecerán en el perfil normal de la rueda resultando:

$$p_n = p_0 \quad (\text{II-157})$$

$$m_n = m_0 \quad (\text{II-158})$$

$$\alpha_n = \alpha_0 \quad (\text{II-159})$$

$$h_f = h_{a_0} + f \quad (\text{II-160})$$

Los datos del perfil tangencial se pueden obtener con las ecuaciones (II-147), (II-151) y (II-152).

El radio primitivo de una rueda helicoidal, observando el perfil frontal de la rueda, resulta ser:

$$r = \frac{p_t \cdot z}{2\pi} = \frac{m_t \cdot z}{2} \quad (\text{II-161})$$

II.6.9 - Dimensiones de una rueda helicoidal

Haciendo una recopilación de las ecuaciones de los apartados anteriores, en una rueda helicoidal, si se genera sin desplazamiento de la herramienta, se tendrá las dimensiones siguientes:

$$\beta = \beta_0 \quad p_n = p_0 \quad m_n = m_0 \quad \alpha_n = \alpha_0$$

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} \quad (\text{II-162})$$

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (\text{II-163})$$

$$m_n = \frac{p_n}{\pi} \quad (\text{II-164})$$

$$m_t = \frac{p_t}{\pi} \quad (\text{II-165})$$

$$d = z \cdot m_t \quad (\text{II-166})$$

$$\text{tg } \alpha_t = \frac{\text{tg } \alpha_n}{\cos \beta} \quad (\text{II-167})$$

$$d_b = d \cdot \cos \alpha_t \quad (\text{II-168})$$

La altura de los dientes depende del módulo normal, resultando

$$d_a = d + 2m_n \quad (\text{II-169})$$

$$d_f = d - 2.5m_n \quad (\text{II-170})$$

$$h_a = 1 m_n \quad (\text{II-171})$$

$$h_f = 1.25 m_n \quad (\text{II-172})$$

$$h = 2.25 m_n \quad (\text{II-173})$$

El diente de una rueda helicoidal es ligeramente corto, ya que su paso depende del módulo tangencial y su altura del módulo normal, y $m_t > m_n$.

II.6.10 - Fuerzas en engranajes helicoidales

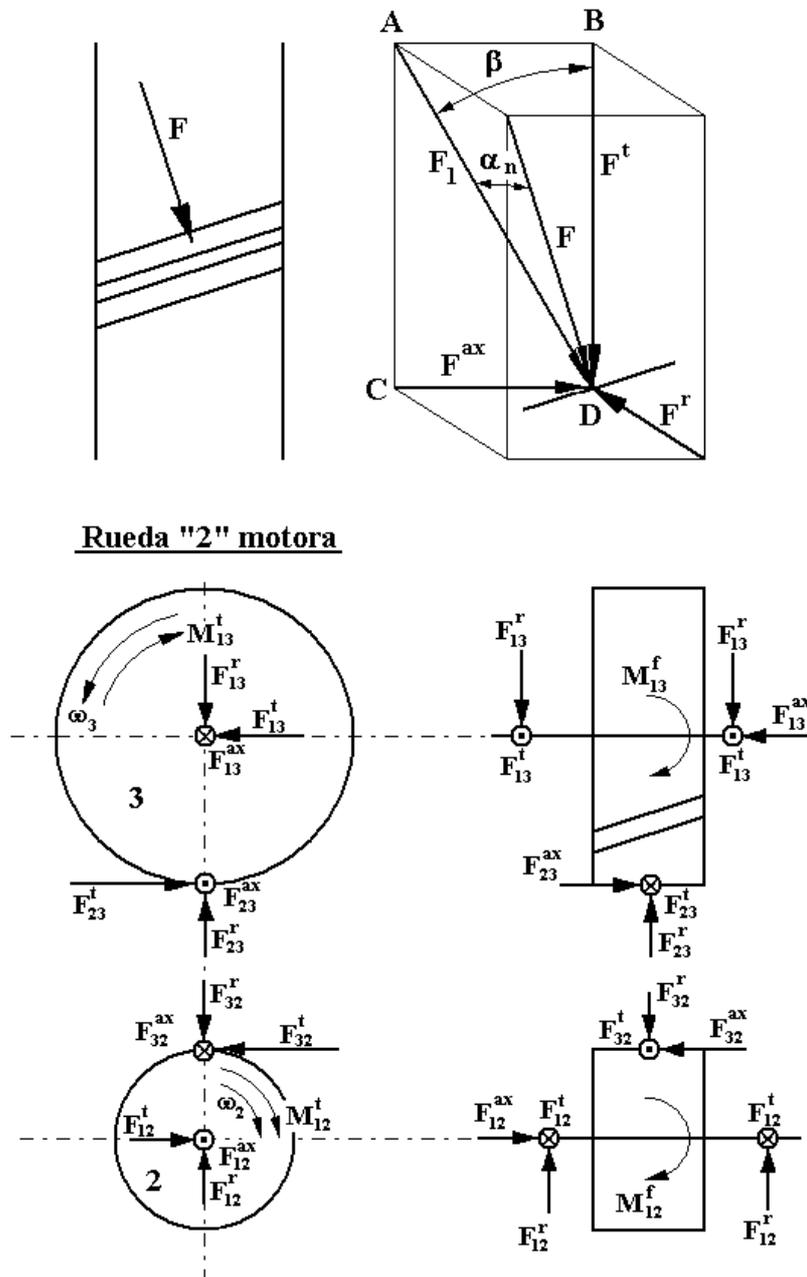


Fig. II-76 Fuerzas en un engranaje helicoidal

La fuerza que aparecerá entre los dientes de las ruedas dentadas helicoidales "F" es perpendicular al plano tangente a los flancos de los dientes en el punto de contacto, figura (II-76). Esta fuerza forma un ángulo " α_n " con el plano "ABCD" tangente al cilindro primitivo, por tanto se tendrá:

$$F_1 = F \cos \alpha_n \quad (\text{II-174})$$

$$F^t = F_1 \cos \beta \quad (\text{II-175})$$

$$F^{ax} = F_1 \sen \beta \quad (\text{II-176})$$

$$F^r = F \sen \alpha_n \quad (\text{II-177})$$

La componente de la fuerza que contribuye a la transmisión de potencia es la tangencial, por tanto se tendrá:

$$F^t = \frac{W}{V} \quad (\text{II-178})$$

Siendo:

- W = Potencia en vatios.
- V = Velocidad de un punto del cilindro primitivo en m/s.

El resto de las componentes serán:

$$F^{ax} = F^t \operatorname{tg} \beta \quad (\text{II-179})$$

$$F_1 = \frac{F^t}{\cos \beta} \quad (\text{II-180})$$

$$F = \frac{F_1}{\cos \alpha_n} = \sqrt{F^{t^2} + F^{r^2} + F^{ax^2}} \quad (\text{II-181})$$

$$F^r = F \sen \alpha_n \quad (\text{II-182})$$

$$|F_{12}^t| = |F_{32}^t| = |F_{23}^t| = |F_{13}^t| \quad (\text{II-183})$$

$$|F_{12}^r| = |F_{32}^r| = |F_{23}^r| = |F_{13}^r| \quad (\text{II-184})$$

$$|F_{12}^{\text{ax}}| = |F_{32}^{\text{ax}}| = |F_{23}^{\text{ax}}| = |F_{13}^{\text{ax}}| \quad (\text{II-185})$$

Los momentos que aparecerán en las ruedas serán:

$$M_{12}^t = F_{32}^t \cdot r_2 \quad (\text{II-186})$$

$$M_{13}^t = F_{23}^t \cdot r_3 \quad (\text{II-187})$$

$$M_{12}^f = F_{32}^{\text{ax}} \cdot r_2 \quad (\text{II-188})$$

$$M_{13}^f = F_{23}^{\text{ax}} \cdot r_3 \quad (\text{II-189})$$

II.7 - ENGRANAJES CÓNICOS

Engranajes cónicos son aquellos que permiten transmitir el movimiento entre ejes que se cortan.

En los engranajes cónicos los axoides de las ruedas son conos con los vértices coincidentes en el punto de corte de los ejes, figura (II-77). El eje instantáneo de rotación relativo entre las dos ruedas es la línea en la que se produce el contacto de las generatrices de los conos primitivos o axoides.

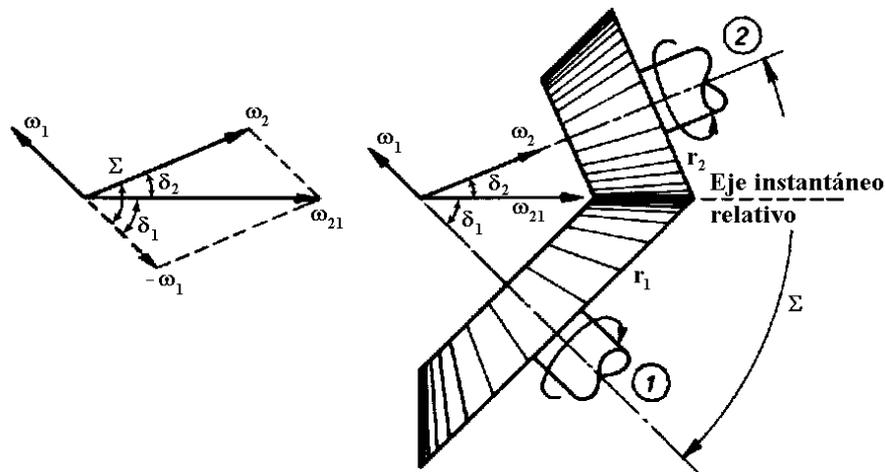


Fig. II-77 Axoides o conos primitivos de un engranaje cónico

La relación de transmisión, teniendo en cuenta la posición del eje instantáneo de rotación, será:

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (\text{II-190})$$

La relación de radios también será la relación de los senos de los ángulos de los semiconos, por lo que se tendrá:

$$\mu = \frac{\text{sen } \delta_1}{\text{sen } \delta_2} \quad (\text{II-191})$$

Y la suma de los ángulos de los semiconos será el ángulo entre ejes:

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2 \quad (\text{II-192})$$

Para determinar el ángulo de semicono que le corresponde a cada rueda, dado el ángulo entre ejes y la relación de transmisión, teniendo en cuenta las ecuaciones (II-191) y (II-192) se puede escribir:

$$\operatorname{sen} \delta_1 = \mu \cdot \operatorname{sen} \delta_2 = \mu \cdot \operatorname{sen}(\Sigma - \delta_1) \quad (\text{II-193})$$

Operando:

$$\operatorname{sen} \delta_1 = \mu \cdot \operatorname{sen} \Sigma \cdot \cos \delta_1 - \mu \cdot \cos \Sigma \cdot \operatorname{sen} \delta_1 \quad (\text{II-194})$$

Dividiendo por $\cos \delta_1$:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \mu \cdot \operatorname{sen} \Sigma - \mu \cdot \cos \Sigma \cdot \operatorname{tg} \delta_1 \quad (\text{II-195})$$

Despejando:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\cos \Sigma + \frac{1}{\mu}} \quad (\text{II-196})$$

Operando de forma similar para " δ_2 ":

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\cos \Sigma + \mu} \quad (\text{II-197})$$

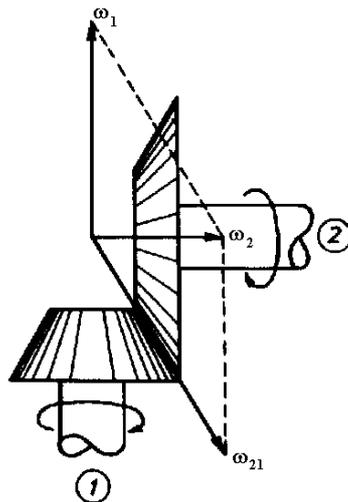


Fig. II-78 Ejes que se cortan a 90°

Si el ángulo entre ejes es de 90° , figura (II-78), los ángulos correspondientes a cada semicono serán:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \mu \quad (\text{II-198})$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{1}{\mu} \quad (\text{II-199})$$

Si el ángulo entre los ejes concurrentes es mayor de 90° , figura (II-79), puede ocurrir que uno de los conos primitivos se convierta en una rueda plana ($\delta_2 = 90^\circ$) e incluso en un cono interior ($\delta_2 > 90^\circ$).

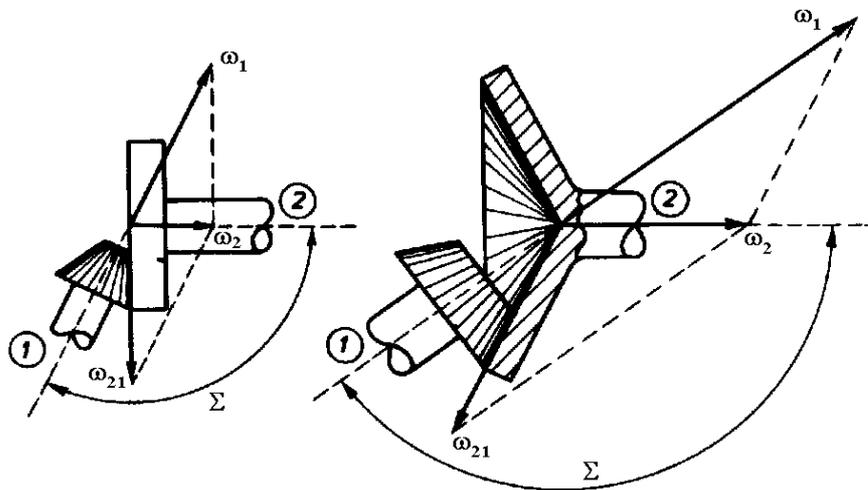


Fig. II-79 Ejes que se cortan con un ángulo mayor de 90° , rueda plana y cono interior.

II.7.1 - Movimiento esférico

La relación geométrica que existe entre los engranajes cónicos y los cilíndricos es la misma que existe entre la geometría esférica y la geometría plana. Del mismo modo que en los engranajes cilíndricos podía estudiarse el movimiento en sólo dos dimensiones sobre un plano de referencia perpendicular a los dos ejes, en los engranajes cónicos puede también estudiarse el movimiento en sólo dos dimensiones, pero sobre una esfera de referencia con el centro en el punto de corte de los ejes, figura (II-80).

Los dos conos axoides o primitivos cortan sobre la esfera de referencia dos circunferencias que ruedan una sobre otra sin salirse de la superficie de la

esfera. Se puede demostrar que dado un perfil de los dientes de una rueda, se puede conseguir un perfil conjugado en la otra rueda.

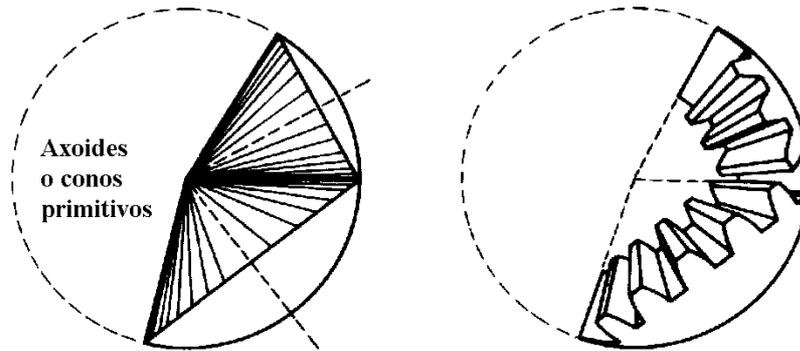


Fig. II-80 El perfil de los dientes se define sobre una superficie esférica.

En los engranajes cónicos, el equivalente de la cremallera es la rueda plana, cuyo cono axoide o primitivo es un plano diametral de la esfera, figura (II-81). El perfil de los dientes de esta rueda suele tomarse como perfil de referencia para definir la familia de ruedas capaces de engranar con ella.

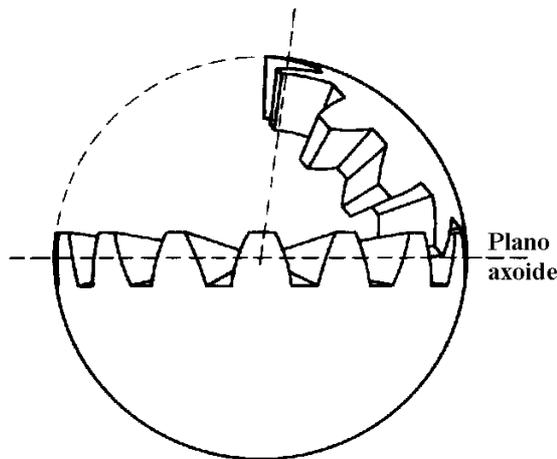


Fig. II-81 Rueda plana de referencia que define las dentaduras de una familia de ruedas cónicas conjugadas.

II.7.2 - Evolvente esférica

Del mismo modo que la evolvente plana se obtenía haciendo rodar un plano sobre el cilindro base, la evolvente esférica se obtiene haciendo rodar un plano sobre el cono de base, figura (II-82).

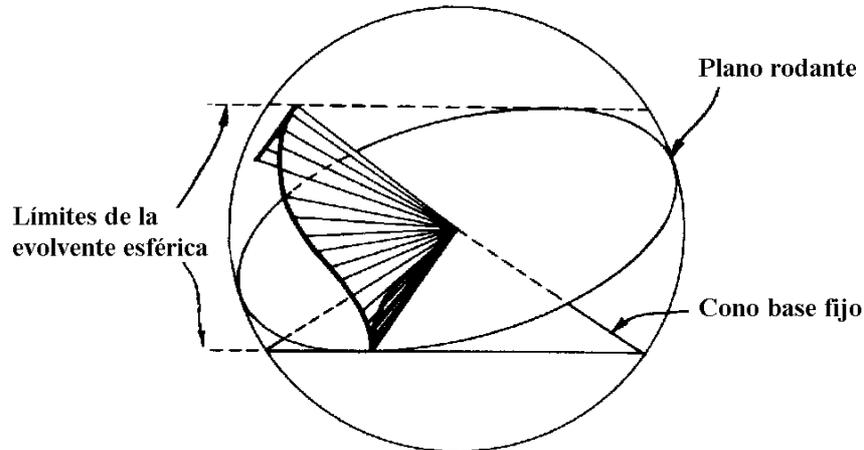


Fig. II-82 Evolvente esférica.

La rueda plana de evolvente esférica no tiene los flancos rectos, tal como se aprecia en la figura (II-83), lo que hace que, aunque las ruedas con este perfil sean conjugadas, no se utilice.

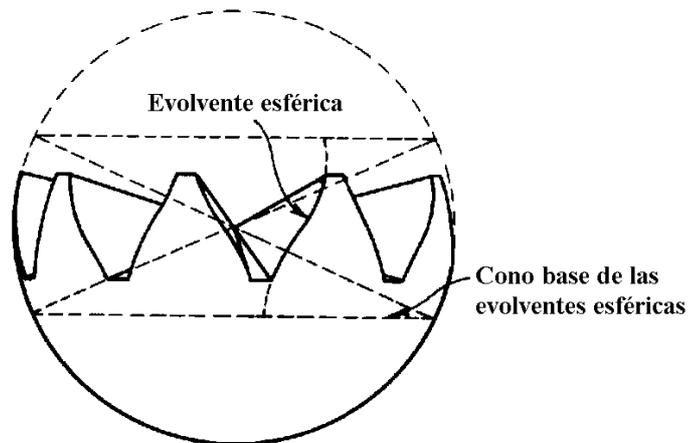


Fig. II-83 Rueda plana de evolvente esférica.

II.7.3 - Ruedas cónicas de dientes piramidales

El perfil realmente empleado en las ruedas cónicas es el de dientes piramidales. La rueda plana correspondiente tiene los flancos planos, figura (II-84), de modo que los dientes tienen forma de pirámide truncada con vértice en el centro de la esfera. El resto de las ruedas tienen perfil conjugado de la

rueda plana piramidal y aunque sus dientes no sean planos se les llama piramidales.

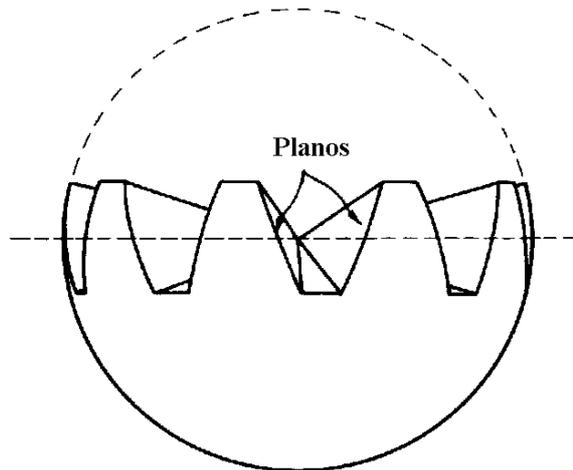


Fig. II-84 Rueda plana de dientes piramidales.

Las ruedas piramidales no funcionan tan bien como las de perfil de evolvente esférica, por lo que no se pueden utilizar para altas velocidades.

Existen dos tipos de ruedas piramidales. En la dentadura piramidal de primera especie la rueda de referencia tiene como primitivo plano y en la de segunda especie la rueda de referencia tiene plano el cono de cabeza, figura (II-85)

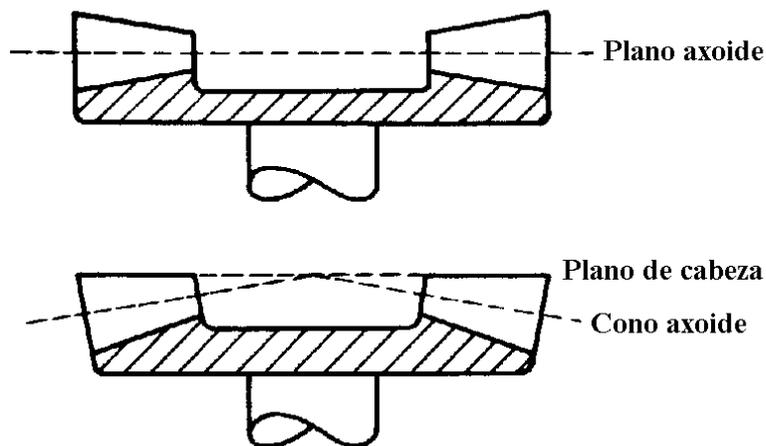


Fig. II-85 Ruedas piramidales de referencia de primera y segunda especie.

II.7.4 - Cono complementario. Rueda cilíndrica equivalente

La verdadera forma de los dientes que están engranando se observan mirando las ruedas dentadas en la dirección "A" en la figura (II-86).

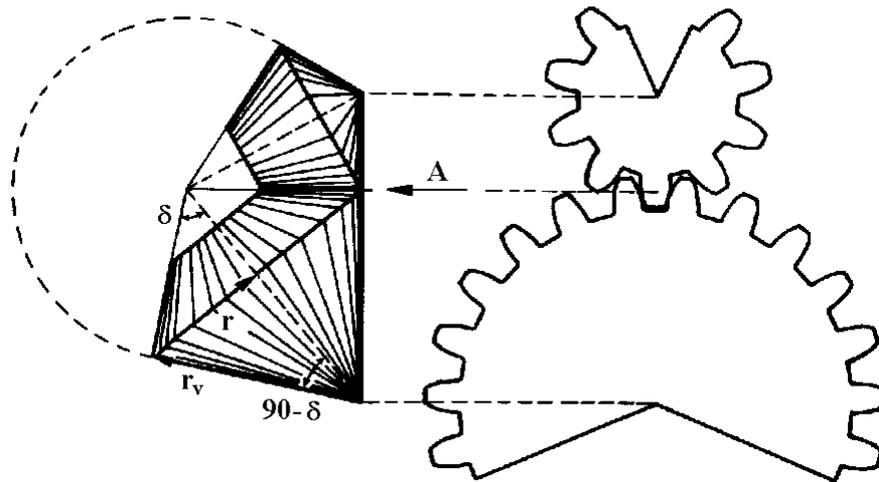


Fig. II-86 Conos complementarios y su desarrollo.

La forma de los dientes es similar a los de una rueda dentada recta cuyo radio primitivo sea el radio del cono complementario "r_v". Los conos complementarios tienen sus generatrices perpendiculares a las de los conos primitivos.

Desarrollando los conos complementarios se obtiene unos sectores circulares correspondientes a unas ruedas rectas con la misma forma del diente que las ruedas cónicas. En la figura (II-86) se observa que:

$$\frac{z}{z_v} = \frac{r}{r_v} = \text{sen}(90 - \delta) = \cos \delta \tag{II-200}$$

$$z_v = \frac{z}{\cos \delta} \tag{II-201}$$

$$r_v = \frac{r}{\cos \delta} \tag{II-202}$$

La mayoría de problemas de las ruedas cónicas como socavación y coeficiente de recubrimiento se puede estudiar sobre las ruedas rectas equivalentes.

II.7.5 - Dimensiones de engranajes cónicos

En la figura (II-87) se puede apreciar las diferentes dimensiones que aparecen en un engranaje cónico.

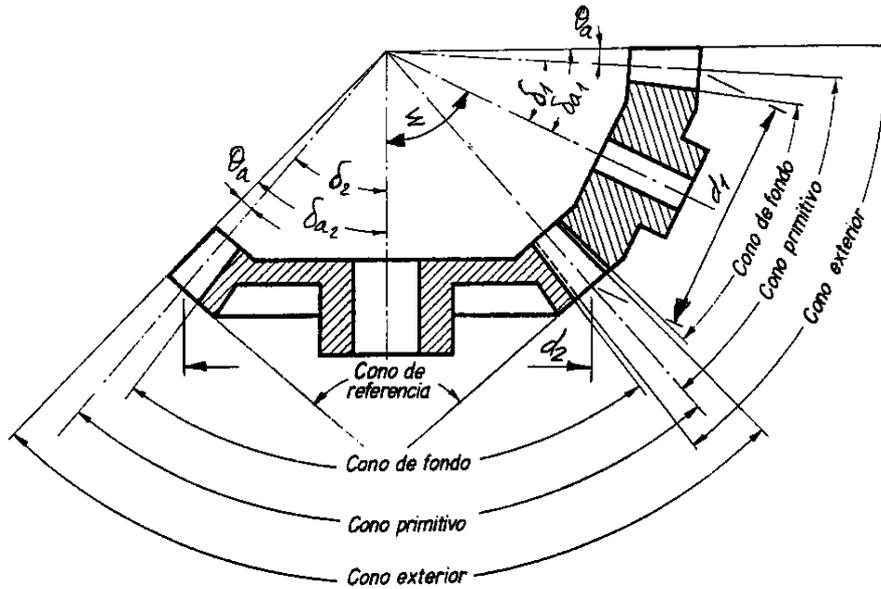


Fig. II-87 Dimensiones de engranajes cónicos.

Recopilando las ecuaciones (II-190), (II-196) y (II-197), se tendrá:

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\cos \Sigma + \frac{1}{\mu}}$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\cos \Sigma + \mu}$$

$$d_1 = z_1 \cdot m \quad (\text{II-203})$$

$$d_2 = z_2 \cdot m \quad (\text{II-204})$$

Para tornearse el cono de cabeza, si la altura de cabeza es igual al módulo, se tendrá:

$$\operatorname{tg} \theta_a = \frac{m}{\operatorname{lon. generatriz}} = \frac{m}{\frac{r}{\operatorname{sen} \delta}} = \frac{m \cdot \operatorname{sen} \delta}{\frac{z \cdot m}{2}} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \delta}{z} \quad (\text{II-205})$$

$$\delta_a = \delta + \theta_a \quad (\text{II-206})$$

Si la altura de fondo es 1.25 módulos se tendrá:

$$\operatorname{tg} \theta_f = \frac{1.25 \cdot m}{\operatorname{lon. generatriz}} = \frac{1.25 \cdot m}{\frac{r}{\operatorname{sen} \delta}} = \frac{1.25 \cdot m \cdot \operatorname{sen} \delta}{\frac{z \cdot m}{2}} = \frac{2.5 \cdot \operatorname{sen} \delta}{z} \quad (\text{II-207})$$

$$\delta_f = \delta - \theta_f \quad (\text{II-208})$$

II.7.6 - Fuerzas en los engranajes cónicos

Suponiendo aplicada la fuerza en el punto medio de la longitud del diente, en un radio " r_1 ", figura (II-87), se tendrá:

$$F^t = \frac{W}{v} \quad (\text{II-209})$$

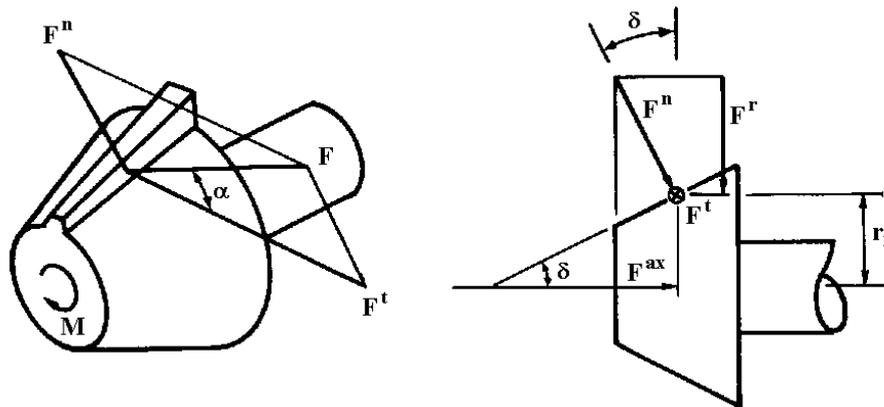


Fig. II-88 Fuerzas en engranajes cónicos.

Siendo:

Engranajes

- F^t = Fuerza tangencial.
- W = Potencia a transmitir en vatios.
- v = Velocidad del punto medio del diente de radio " r_1 ".

La fuerza que realmente aparece entre los perfiles de los dientes " F " será perpendicular al plano tangente a los dientes en el punto de contacto, por lo tanto formará un ángulo " α " con la fuerza tangencial. La fuerza " F " y la fuerza tangencial están contenidas en un plano que forma un ángulo " δ " con el plano perpendicular al eje de la rueda.

Teniendo en cuenta los ángulos expuestos en el párrafo anterior, resultarán las ecuaciones siguientes:

$$F^t = F \cdot \cos \alpha \quad (\text{II-210})$$

$$F^n = F \cdot \sin \alpha \quad (\text{II-211})$$

$$F^r = F^n \cdot \cos \delta = F \sin \alpha \cos \delta \quad (\text{II-212})$$

$$F^{ax} = F^n \cdot \sin \delta = F \sin \alpha \sin \delta \quad (\text{II-213})$$

$$M_t = F^t r_1 \quad (\text{II-214})$$

$$M_f = F^{ax} r_1 \quad (\text{II-215})$$

II.8 - ENGRANAJES DE TORNILLO SINFÍN

Si se tiene dos ruedas dentadas helicoidales en las que los ángulos de inclinación de sus hélices no cumplan la condición de tener el mismo valor y sentidos contrarios, al engranar entre ellas sus ejes no serán paralelos, sino que se cruzarán. Estas ruedas dentadas forman un engranaje helicoidal de ejes cruzados, figura (II-89).

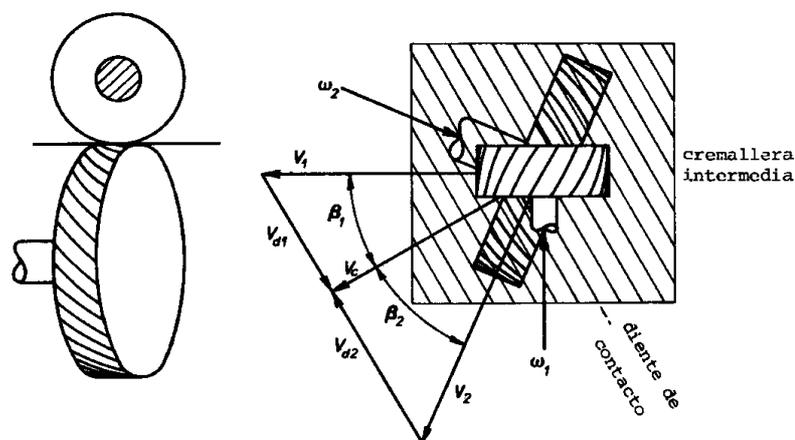


Fig. II-89 Engranaje de ruedas helicoidales entre ejes que se cruzan

Una rueda helicoidal puede engranar con otra cuyo ángulo de la hélice sea positivo, negativo e incluso con una rueda recta, siempre que tengan el mismo módulo normal, tal como se observa en la figura (II-90).

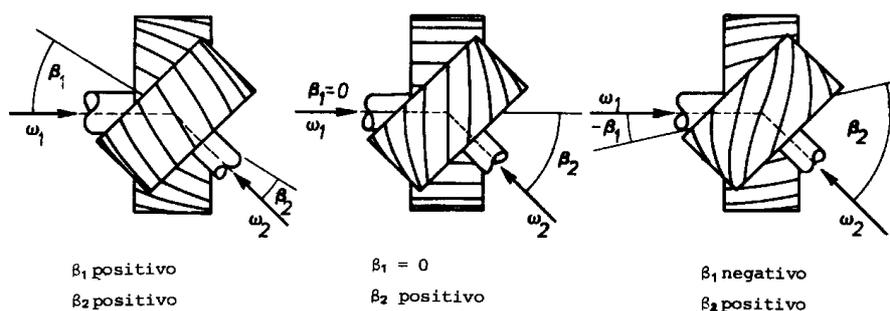


Fig. II-90 Posibilidades de engrane de una rueda helicoidal

Si una de las ruedas que forma el engranaje tiene pocos dientes, normalmente cuatro o menos, tiene el aspecto de un tornillo, figura (II-91). En

este caso se les suele llamar engranajes de tornillo sinfín. En los engranajes de tornillo sinfín, la rueda de pocos dientes se llama tornillo sinfín y la rueda de más dientes corona.

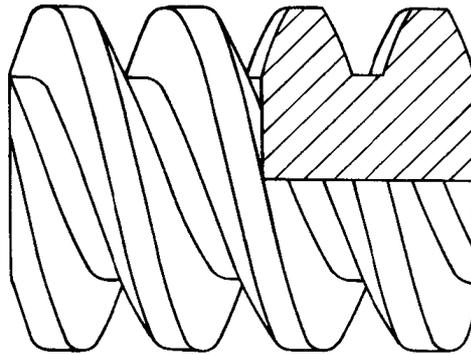


Fig. II-91 Tornillo helicoidal de dos dientes

Estos engranajes permiten grandes relaciones de reducción, pudiendo ser de 100 ó mayor. Esta relación en engranajes rectos o helicoidales entre ejes paralelos raramente llega a 10.

Normalmente son trenes irreversibles, no permitiendo la entrada de movimiento por la corona. También se produce un gran deslizamiento en el punto de contacto, por lo que deben estar convenientemente lubricados y refrigerados. Como resumen, estos engranajes tienen la ventaja de grandes relaciones de reducción pero gran desprendimiento de calor debido al rozamiento.

En los engranajes de tornillo sinfín, el contacto entre los dientes de las ruedas es un contacto puntual tal como se aprecia en la figura (II-92).

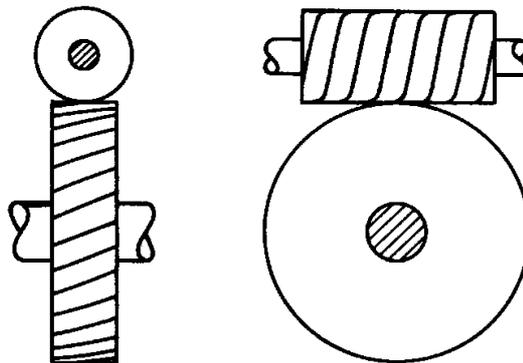


Fig. II-92 Contacto puntual entre los dientes de las ruedas

II.8.1 - Tornillo sinfín y corona glóbica

Con el fin de convertir el punto de contacto en una línea de contacto y así distribuir la fuerza a transmitir, se suele hacer engranajes de tornillo sinfín con la corona glóbica, figura (II-93). En este caso la corona ya no es una rueda dentada helicoidal.

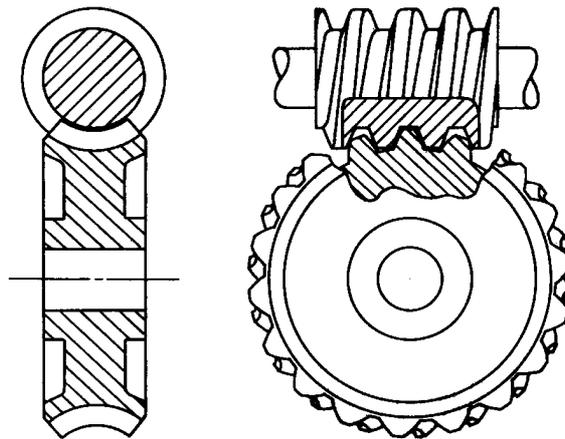


Fig. II-93 Tornillo sinfín y corona glóbica

Otra forma de distribuir la fuerza a transmitir es utilizar como corona una rueda helicoidal y hacer el tornillo sinfín glóbico. De esta manera se consigue, aunque el contacto entre dientes es puntual, aumentar el número de dientes que están en contacto, figura (II-94).

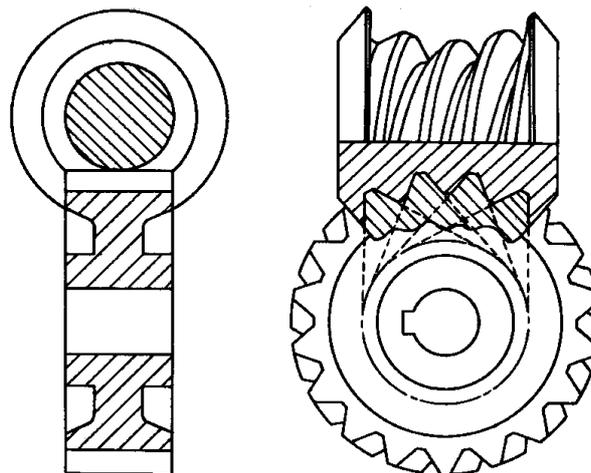


Fig. II-94 Tornillo sinfín glóbico y corona normal

Finalmente otra solución que se suele adoptar es realizar tanto el tornillo sinfín como la corona glóbicos, figura (II-95). De este modo se consigue aumentar el número de dientes en contacto y que el contacto de cada diente sea lineal.

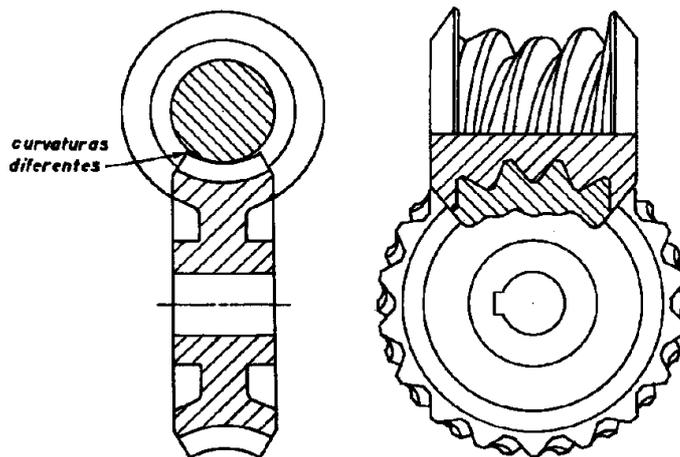


Fig. II-94 Tornillo sinfín glóbico y corona glóbica

Los tornillos sinfín y coronas glóbicas no son ruedas helicoidales, por lo que no son intercambiables con otras ruedas helicoidales cualesquiera, deben engranar con ruedas diseñadas especialmente para engranar con ellas.

II.8.2 - Mecanizado de coronas y tornillos sinfín

El mecanizado de las coronas de engranajes de tornillo sinfín se puede realizar por medio de fresas de forma o fresas madre tal como se observa en la figura (II-95). El diámetro primitivo de la fresa debe coincidir con el diámetro primitivo del tornillo que ha de engranar con la corona a mecanizar si se desea que el contacto sea lineal.

Se puede admitir que el diámetro primitivo de la fresa sea mayor que el diámetro primitivo del tornillo. En este caso el contacto entre dientes sería puntual en el centro de la corona.

Si el diámetro primitivo de la fresa es menor que el diámetro primitivo del tornillo, el contacto se producirá en las crestas de la corona, siendo esta situación inadmisibles.

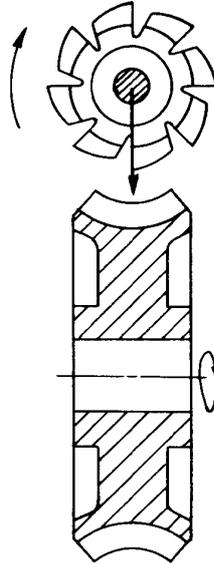


Fig. II-95 Mecanizado de la corona

El mecanizado del tornillo sinfin se puede hacer por medio de fresas bicónicas o fresas frontales tal como se observa en la figura (II-96). También se pueden mecanizar en el torno de forma similar al roscado de un tornillo.

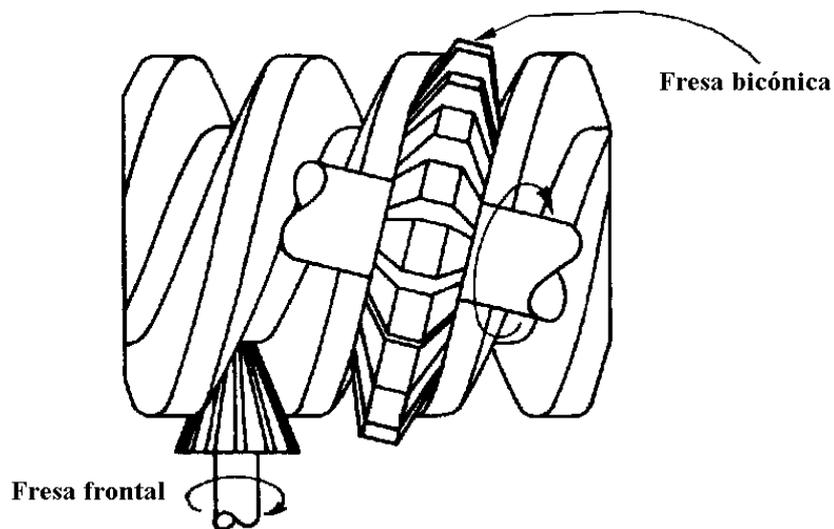


Fig. II-96 Mecanizado del tornillo sinfin

II.8.3 - Dimensiones de un engranaje de tornillo sinfín

Al diseñar un engranaje de tornillo sinfín, figura (II-97), normalmente se escoge primero el radio primitivo del tornillo " r_1 ", siendo el ideal el que coincida con el radio primitivo de la herramienta con que se va mecanizar la corona.

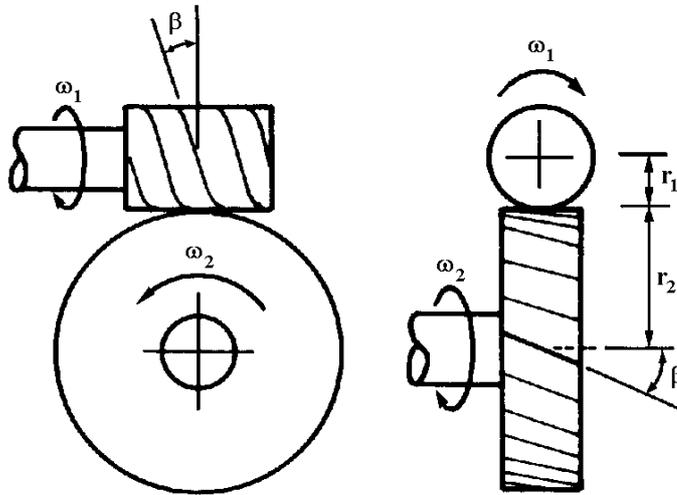


Fig. II-97 Dimensiones de un engranaje de tornillo sinfín

Si se desarrolla el cilindro primitivo del tornillo se observa que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{m_n \cdot z_1}{2r_1} \quad (\text{II-215})$$

El módulo tangencial será:

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (\text{II-216})$$

Los pasos serán:

$$p_n = \pi \cdot m_n \quad (\text{II-217})$$

$$p_t = \pi \cdot m_t \quad (\text{II-218})$$

$$p_{z_1} = z_1 \cdot p_t \quad (\text{II-219})$$

Los radios de la corona y del tornillo serán:

$$r_2 = \frac{m_t \cdot z_2}{2} \quad (\text{II-220})$$

$$r_{a1} = r_1 + m_n \quad (\text{II-221})$$

$$r_{a2} = r_2 + m_n \quad (\text{II-222})$$

$$r_{f1} = r_1 - 1.25m_n \quad (\text{II-223})$$

$$r_{f2} = r_2 - 1.25m_n \quad (\text{II-224})$$

La distancia entre ejes será:

$$a = r_1 + r_2 \quad (\text{II-225})$$

II.8.4 - Fuerzas en un engranaje de tornillo sinfín

La fuerza que aparece entre los flancos de los dientes del tornillo y la corona "F" es perpendicular al plano tangente a los flancos de los dientes en el punto de contacto, tal como se observa en la figura (II-98).

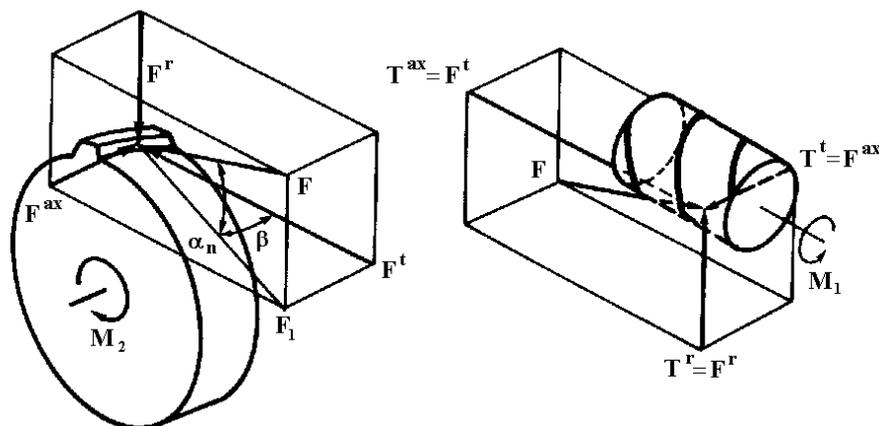


Fig. II-98 Fuerzas en un engranaje de tornillo sinfín

La fuerza "F" forma un ángulo " α_n " con un plano tangente al cilindro primitivo de la corona, por tanto:

$$F_1 = F \cdot \cos \alpha_n \quad (\text{II-226})$$

La fuerza "F₁" forma un ángulo "β" con la dirección de la velocidad de un punto del cilindro primitivo de la corona, por tanto se tendrá:

$$F^t = F_1 \cdot \cos \beta = T^{\text{ax}} \quad (\text{II-227})$$

$$F^r = F \cdot \sin \alpha_n = T^r \quad (\text{II-228})$$

$$F^{\text{ax}} = F_1 \cdot \sin \beta = T^t \quad (\text{II-229})$$

Para determinar las fuerzas para transmitir una determinada potencia:

$$F^t = \frac{W}{v_2} \quad (\text{II-230})$$

$$T^t = \frac{W}{v_1} \quad (\text{II-231})$$

$$v_2 = \frac{2\pi r_2 \cdot n_2}{60} \quad (\text{II-232})$$

$$v_1 = \frac{2\pi r_1 \cdot n_1}{60} \quad (\text{II-233})$$

$$v_1 \neq v_2 \quad (\text{II-234})$$

$$M_1 = T^t \cdot r_1 \quad (\text{II-235})$$

$$M_2 = F^t \cdot r_2 \quad (\text{II-236})$$

$$M_1^f = T^{\text{ax}} \cdot r_1 \quad (\text{II-237})$$

$$M_2^f = F^{\text{ax}} \cdot r_2 \quad (\text{II-238})$$

CAPÍTULO III - SÍNTESIS DE MECANISMOS DE FRICCIÓN Y ADHERENCIA

III.1 - ROZAMIENTO EN PLANO HORIZONTAL

Realizando el experimento sencillo de empujar a un bloque sobre una superficie horizontal sin lubricación (rozamiento seco) por medio de una fuerza "P", figura (III-1), se observa que hasta que la fuerza no adquiere un determinado valor, el bloque no se desplaza. Este valor límite de "P" depende del estado de las superficies, de los materiales en contacto y del peso del bloque.

Estudiando el equilibrio de fuerzas en el bloque se tiene que en la superficie de contacto aparecerá una fuerza normal "N" que equilibrará al peso "W" del bloque y una fuerza " F_r " que equilibrará a la fuerza "P" hasta que ésta adquiera un determinado valor. A partir de este momento, si la fuerza de empuje aumenta, el bloque empezará a deslizar acelerándose.

Si una vez iniciado el deslizamiento, se reduce el valor de la fuerza de empuje para evitar la aceleración del bloque se observa que el valor de "P" para mantener el deslizamiento del bloque es menor que para iniciar dicho deslizamiento.

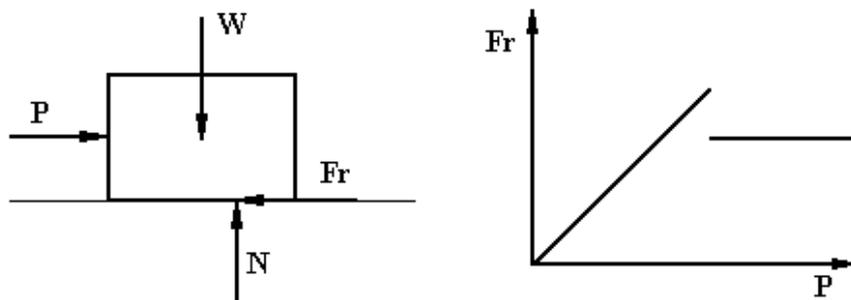


Fig. III-1 Relación entre la fuerza de empuje y la de rozamiento

Realizando el experimento para diferentes pesos del bloque y para diferentes áreas de la superficie de contacto se observa que, para unos mismos materiales y unos acabados superficiales iguales, existe proporcionalidad entre la fuerza de rozamiento " F_r " y la normal "N" en el punto de deslizamiento

inminente, siendo el coeficiente de proporcionalidad el coeficiente de rozamiento estático

$$\mu_s = \frac{F_r}{N} \quad (\text{III-1})$$

También existe proporcionalidad entre la fuerza de rozamiento y la normal para un deslizamiento a velocidad constante, siendo este coeficiente el coeficiente de rozamiento dinámico

$$\mu_k = \frac{F_r}{N} \quad (\text{III-2})$$

El coeficiente de rozamiento dinámico es aproximadamente un 80% del coeficiente de rozamiento estático.

Estudiando el equilibrio de momentos en el bloque se tiene que, conforme aumenta el valor de la fuerza de empuje "P" va aumentando el descentramiento del punto de aplicación de la normal "N", figura (III-2). Si se halla la resultante "R" de la normal "N" y de la fuerza de rozamiento "F_r", resulta que la resultante forma un ángulo con la normal "θ". Este ángulo también aumenta al ir aumentando el valor de la fuerza de empuje hasta llegar al punto de deslizamiento inminente, punto en el que adquiere el valor de "θ_s".

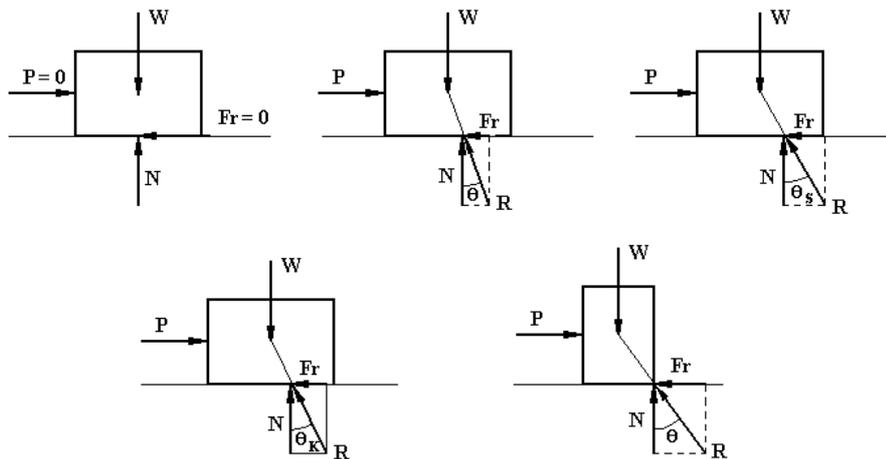


Fig. III-2 Descentramiento de la normal respecto del peso del bloque

La relación entre la fuerza de rozamiento " F_r " y la normal " N " también se puede expresar como:

$$F_r = N \cdot \operatorname{tg} \theta \quad (\text{III-3})$$

En el punto de deslizamiento inminente la fuerza de rozamiento " F_r " será máxima y tendrá el valor de

$$F_{r\text{máx}} = N \cdot \operatorname{tg} \theta_s \quad (\text{III-4})$$

De la ecuación (III-4) se desprende que el coeficiente de rozamiento estático será:

$$\mu_s = \operatorname{tg} \theta_s \quad (\text{III-5})$$

Realizando el mismo razonamiento cuando el bloque se desliza a velocidad constante, se tendrá que el ángulo que forma la resultante será " θ_k " y la relación entre la fuerza de rozamiento y la normal será:

$$F_r = N \cdot \operatorname{tg} \theta_k \quad (\text{III-6})$$

Resultando que:

$$\mu_k = \operatorname{tg} \theta_k \quad (\text{III-7})$$

De la figura (III-2), y como conclusión, se desprende que al ir aumentando el valor de la fuerza de empuje " P " va aumentando el ángulo " θ " y se darán los casos siguientes:

- $\theta = 0$ Si no se aplica fuerza de empuje.
- $\theta < \theta_s$ No desliza.
- $\theta = \theta_s$ Deslizamiento inminente.
- $\theta > \theta_s$ No es posible ya que el bloque desliza acelerándose.
- $\theta = \theta_k$ Una vez iniciado el deslizamiento.
- Si al descentrarse " N " queda fuera de la base Vuelco.

III.2 - ROZAMIENTO EN PLANO INCLINADO

Colocando un bloque sin lubricación sobre un plano inclinado con un ángulo " θ " respecto de la horizontal, figura (III-3), se puede descomponer su peso " W " en una componente paralela al plano inclinado y en otra perpendicular. Sus valores serán:

$$W_t = W \cdot \text{sen } \theta \quad (\text{III-8})$$

$$W_n = W \cdot \text{cos } \theta \quad (\text{III-9})$$

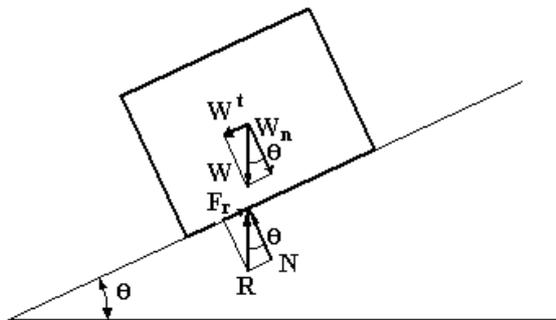


Fig. III-3 Bloque sobre un plano inclinado

En la superficie de contacto aparecerán una fuerza perpendicular al plano " N " y una fuerza de rozamiento " F_r ".

Estudiando el equilibrio de fuerzas se obtiene:

$$N = W_n \quad (\text{III-10})$$

$$F_r = W_t \quad (\text{III-11})$$

Como la fuerza que intenta deslizar al bloque hacia abajo es " W_t " y la fuerza de rozamiento máxima es:

$$F_{r\text{máx}} = \mu \cdot N = N \cdot \text{tg } \theta_s = W \cdot \text{sen } \theta_s \quad (\text{III-12})$$

Siendo:

$$\theta_s = \text{arctg } \mu \quad (\text{III-13})$$

Resultará:

- $\theta < \theta_s$ El bloque no desliza.
- $\theta = \theta_s$ Deslizamiento inminente.
- $\theta > \theta_s$ El bloque desliza bajando por el plano inclinado.

III.2.1 - Plano inclinado con ángulo respecto de la horizontal $\theta < \theta_s$

En este caso el bloque no deslizará. Si se desea hacer deslizar al bloque hacia arriba por el plano inclinado aparecerán las fuerzas que se representa en la figura (III-4). Para desplazar el bloque hacia arriba habrá que aplicar una fuerza "P".

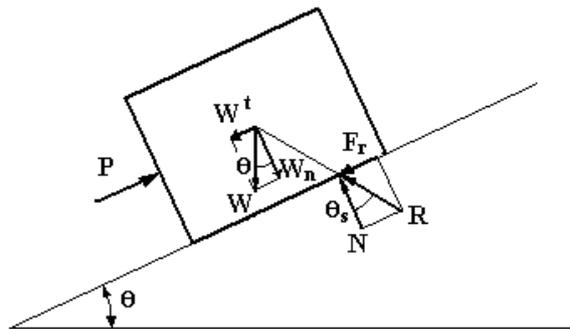


Fig. III-4 Plano inclinado con $\theta < \theta_s$, fuerza para subir

$$N = W_n = W \cdot \cos\theta \quad (III-14)$$

$$F_r = \mu \cdot N = N \cdot \text{tg}\theta_s = W \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s \quad (III-15)$$

Fuerza para subir:

$$P = W \cdot \text{sen}\theta + W \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s = W \cdot (\text{sen}\theta + \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s) \quad (III-16)$$

Si se desea hacer deslizar al bloque hacia abajo por el plano inclinado aparecerán las fuerzas que se representa en la figura (III-5). Para desplazar el bloque hacia abajo habrá que aplicar una fuerza "P".

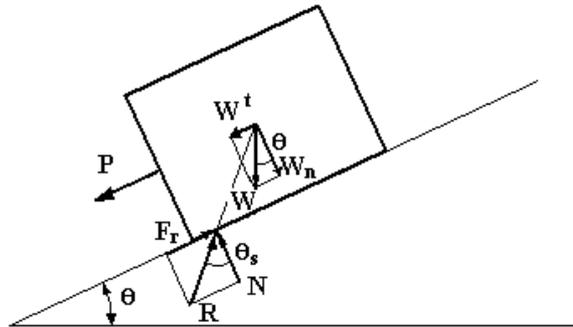


Fig. III-5 Plano inclinado con $\theta < \theta_s$, fuerza para bajar

$$N = W_n = W \cdot \cos\theta \quad (\text{III-17})$$

$$F_r = \mu \cdot N = N \cdot \text{tg}\theta_s = W \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s \quad (\text{III-18})$$

Fuerza para bajar:

$$P = W \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s - W \cdot \text{sen}\theta = W \cdot (\cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s - \text{sen}\theta) \quad (\text{III-19})$$

III.2.2 - Plano inclinado con ángulo respecto de la horizontal $\theta = \theta_s$

En este caso el bloque está a punto de deslizamiento inminente hacia abajo. Las fuerzas que aparecerán en el bloque se pueden observar en la figura (III-6). Para hacer deslizar al bloque hacia arriba habrá que aplicar una fuerza "P".

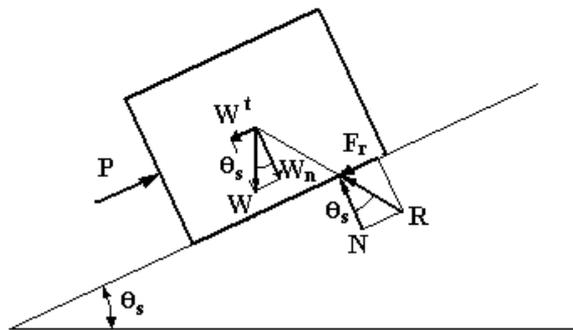


Fig. III-6 Plano inclinado con $\theta = \theta_s$, fuerza para subir

$$N = W_n = W \cdot \cos\theta_s \quad (\text{III-20})$$

$$F_r = \mu \cdot N = N \cdot \text{tg}\theta_s = W \cos\theta_s \cdot \text{tg}\theta_s \quad (\text{III-21})$$

Fuerza para subir:

$$P = W \cdot \text{sen}\theta_s + W \cos\theta_s \cdot \text{tg}\theta_s = 2 \cdot W \cdot \text{sen}\theta_s \quad (\text{III-22})$$

Si se desea hacer deslizar al bloque hacia abajo por el plano inclinado aparecerán las fuerzas que se representa en la figura (III-7). Para desplazar el bloque hacia abajo habrá que aplicar una fuerza "P".

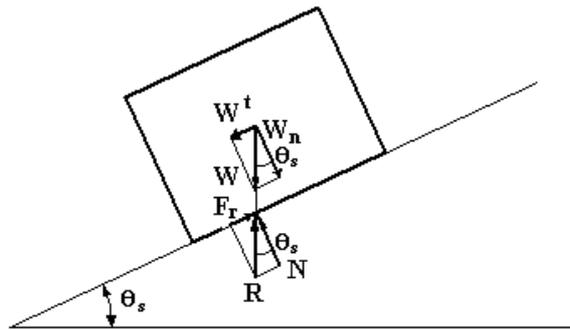


Fig. III-7 Plano inclinado con $\theta = \theta_s$, fuerza para bajar

$$N = W_n = W \cdot \cos\theta_s \quad (\text{III-23})$$

$$F_r = \mu \cdot N = N \cdot \text{tg}\theta_s = W \cos\theta_s \cdot \text{tg}\theta_s \quad (\text{III-24})$$

Fuerza para bajar:

$$P = W \cos\theta_s \cdot \text{tg}\theta_s - W \cdot \text{sen}\theta_s = 0 \quad (\text{III-25})$$

III.2.3 - Plano inclinado con ángulo respecto de la horizontal $\theta > \theta_s$

En este caso el bloque deslizará hacia abajo. Las fuerzas que aparecerán en el bloque se pueden observar en la figura (III-8).

Para desplazar el bloque hacia arriba habrá que aplicar una fuerza "P".

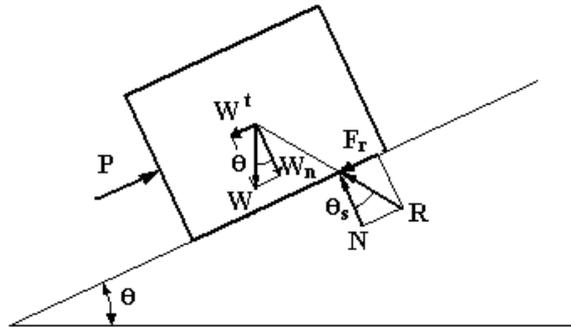


Fig. III-8 Plano inclinado con $\theta > \theta_s$, fuerza para subir

$$N = W_n = W \cdot \cos\theta \quad (\text{III-26})$$

$$F_r = \mu \cdot N = N \cdot \text{tg}\theta_s = W \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s \quad (\text{III-27})$$

Fuerza para subir:

$$P = W \cdot \text{sen}\theta + W \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s = W \cdot (\text{sen}\theta + \cos\theta \cdot \text{tg}\theta_s) \quad (\text{III-28})$$

Si se desea que el bloque no deslice hacia abajo por el plano inclinado aparecerán las fuerzas que se representa en la figura (III-9). Para que no se desplace el bloque hacia abajo habrá que aplicar una fuerza "P".

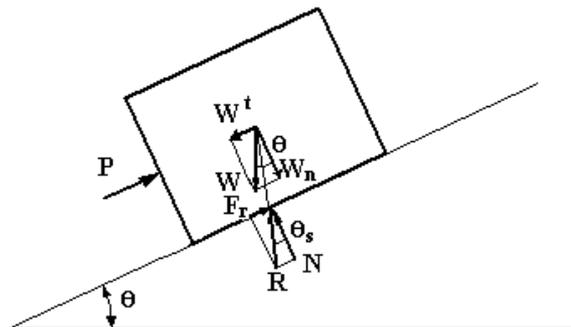


Fig. III-9 Plano inclinado con $\theta > \theta_s$, fuerza para que no baje

$$N = W_n = W \cdot \cos\theta \quad (\text{III-29})$$

$$F_r = \mu \cdot N = N \cdot \operatorname{tg} \theta_s = W \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \theta_s \quad (\text{III-30})$$

Fuerza para que no baje:

$$P = W \cdot \operatorname{sen} \theta - W \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \theta_s = W \cdot (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \theta_s) \quad (\text{III-31})$$

III.3 - CUÑAS

Una cuña es un mecanismo sencillo que consiste en un bloque con un ángulo pequeño entre las caras de trabajo. Normalmente se utilizan por parejas tal como se observa en la figura (III-10) y sin lubricación.

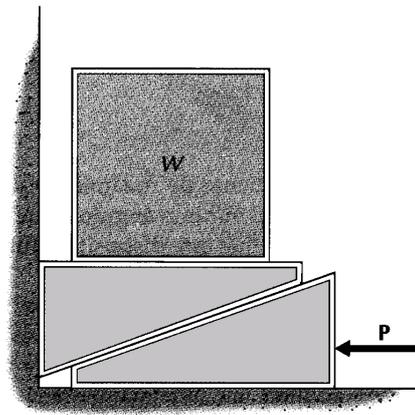


Fig. III-10 Cuñas

Por medio de una cuña se pueden elevar grandes pesos aplicando una fuerza "P" relativamente pequeña.

Además, si el ángulo de la cuña y los coeficientes de rozamiento de las caras de la cuña son apropiados, se puede conseguir que la cuña permanezca en equilibrio una vez eliminada la fuerza "P" necesaria para introducirla.

Para estudiar las fuerzas que aparecen en una cuña se utilizan métodos semigráficos tal como se observa en la figura (III-11), donde:

- R_1 = Resultante de la fuerza normal y de la fuerza de rozamiento en la superficie "1".
- R_2 = Resultante de la fuerza normal y de la fuerza de rozamiento en la superficie "2".

- θ = Ángulo de la cuña.
- θ_1 = Ángulo entre " R_1 " y la normal a la superficie "1".
- θ_2 = Ángulo entre " R_2 " y la normal a la superficie "2".
- P = Fuerza aplicada a la cuña.

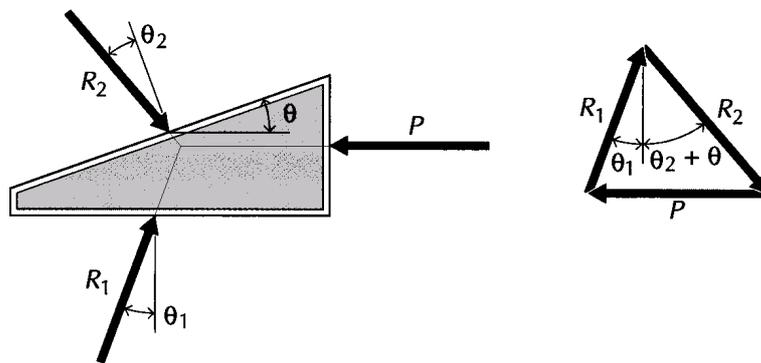


Fig. III-11 Equilibrio de fuerzas en una cuña

En las cuñas no se estudia el equilibrio de momento, ya que normalmente las cuñas se diseñan de forma que resulte imposible el vuelco.

Para determinar la fuerza necesaria para introducir una cuña, se debe tener en cuenta que en las dos superficies de la cuña se producirá deslizamiento y, por tanto, los ángulos " θ_1 " y " θ_2 " pasarán a ser " θ_{1s} " y " θ_{2s} " tal como se observa en la figura (III-12).

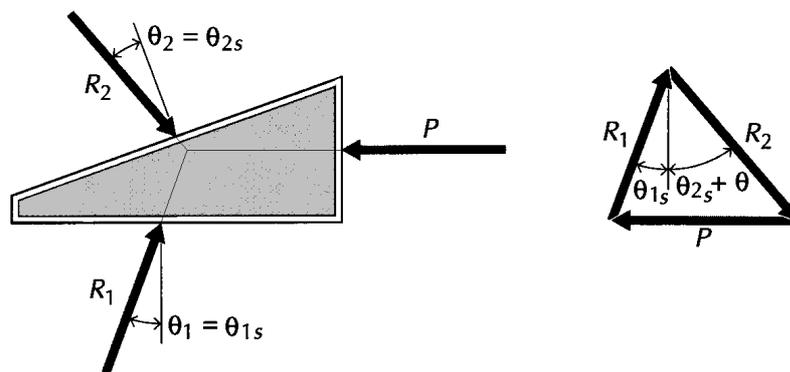


Fig. III-12 Fuerza para introducir la cuña

Si la fuerza "P" aplicada no es capaz de producir el deslizamiento de la cuña hacia adentro, no se pueden determinar los valores de "R₁" y "R₂", ya que no se puede determinar los ángulos que forman con las normales respectivas. Lo único que se sabe es que las resultantes formarán con las normales respectivas unos ángulos comprendidos entre cero y el ángulo de deslizamiento correspondiente.

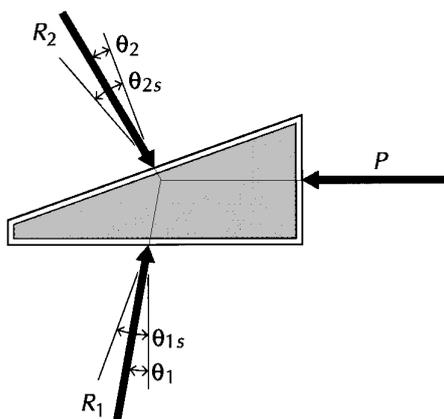


Fig. III-13 Fuerzas indeterminadas cuando no existe deslizamiento

Una vez introducida una cuña, si ésta está en equilibrio, se necesitará una fuerza para extraerla tal como se puede apreciar en la figura (III-14).

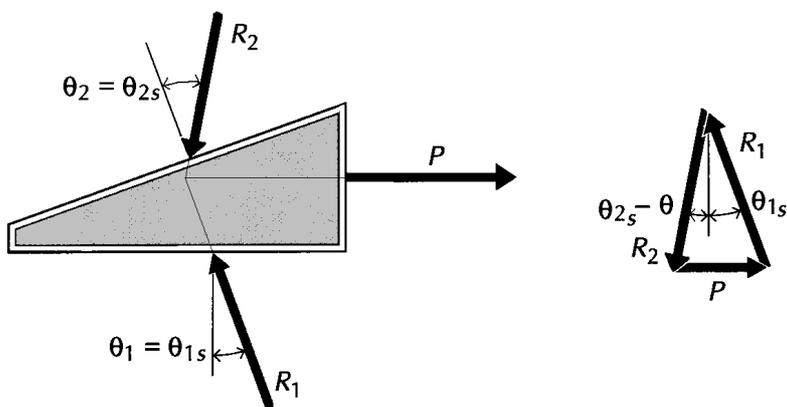


Fig. III-14 Fuerza para extraer la cuña

Si la cuña tiene un ángulo bastante grande entre caras y los coeficientes de rozamiento de dichas caras no son muy elevados, puede darse el caso de que la cuña sea expulsada al desaparecer la fuerza "P". En este caso es necesario aplicar una fuerza para evitar que la cuña salga, tal como se observa en la figura (III-15).

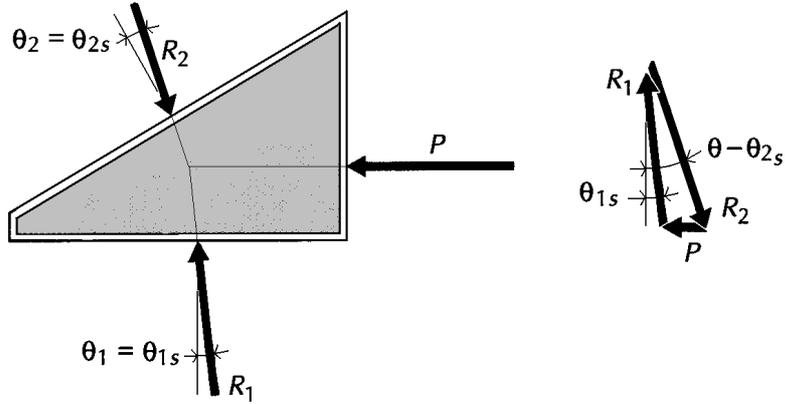


Fig. III-15 Fuerza para evitar que salga la cuña

III.4 - ROSCAS

Las roscas en tornillos y tuercas, además de poder utilizarse como elementos de fijación, se pueden utilizar como mecanismos. El mecanismo de tornillo y tuerca sirve para transformar un movimiento giratorio en un movimiento de traslación y si la rosca fuese reversible también se podría transformar un movimiento rectilíneo en giratorio.

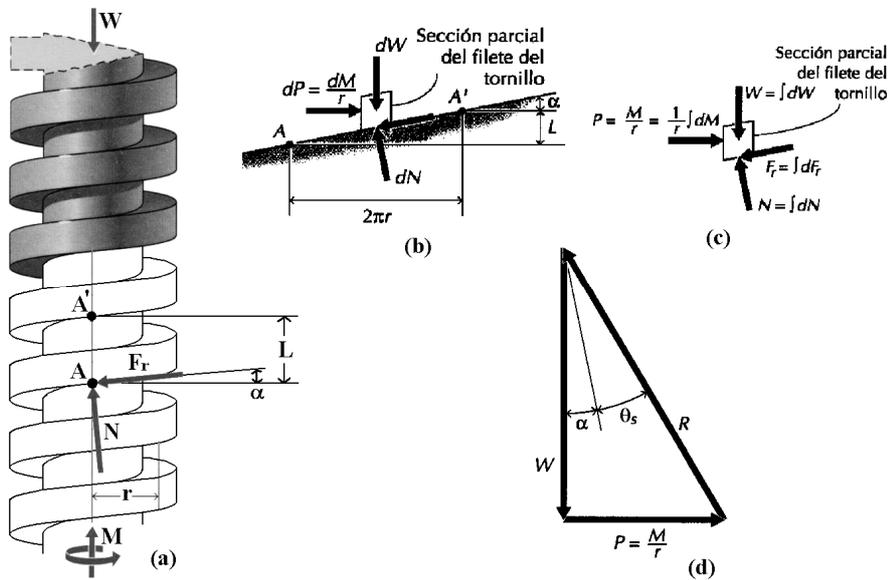


Fig. III-16 Fuerzas en una rosca de sección rectangular con el tornillo a punto de subir

Una rosca de sección rectangular se puede considerar como un plano inclinado enrollado en forma de hélice sobre un cilindro, figura (III-16(a)). Para conseguir subir el tornillo por el interior de una tuerca contra una fuerza "W" habrá que aplicar un momento "M".

Si se desarrolla una vuelta de la rosca, figura (III-16(b)), y se considera un elemento diferencial de la rosca del tornillo apoyado sobre la rosca de la tuerca se observa que es similar a un bloque sobre un plano inclinado.

Para conseguir que el elemento diferencial de rosca del tornillo, sobre el actúa parte de la fuerza a vencer "dW", suba sobre el plano inclinado de la rosca de la tuerca habrá que aplicar una fuerza horizontal "dP". En la superficie de contacto aparecerán una fuerza normal "dN" y una fuerza de rozamiento "dFr".

La fuerza horizontal "dP" en el tornillo no se aplica como tal sino que se introduce en forma de momento "dM".

$$dP = \frac{dM}{r} \quad (III-32)$$

Siendo "r" el radio medio de la rosca.

Realizando la integración de las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial de rosca a lo largo de toda la rosca se tendrá, figura (III-16(c)), un bloque sometido a una fuerza vertical "W", una fuerza horizontal "P", una fuerza normal "N" y una fuerza de rozamiento "Fr". En este caso la fuerza horizontal será:

$$P = \frac{M}{r} \quad (III-33)$$

Si se sustituyen la fuerza normal y la de rozamiento por su resultante "R" y se plantea el equilibrio del bloque, se obtiene el polígono de fuerzas de la figura (III-16(d)), en el que:

$$P = \frac{M}{r} = W \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \theta_s) \quad (III-34)$$

Siendo " θ_s " el ángulo que forman la normal "N" y la resultante "R" en el punto de deslizamiento inminente sin lubricación:

$$\theta_s = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \mu_s \quad (III-35)$$

Y " α " el ángulo de inclinación del filete de la rosca que se puede calcular como:

$$\alpha = \text{arc. tg} \frac{L}{2\pi r} \quad (\text{III-36})$$

De la ecuación (III-34) se puede obtener el momento a aplicar para subir un tornillo contra una fuerza "W" teniendo en cuenta el rozamiento entre el tornillo y la tuerca:

$$M = r \cdot W \cdot \text{tg}(\alpha + \theta_s) \quad (\text{III-37})$$

Si no se aplica el par "M" al tornillo, el filete del tornillo intentará deslizarse hacia abajo, apareciendo las fuerzas que se observan en la figura (III-17(a)).

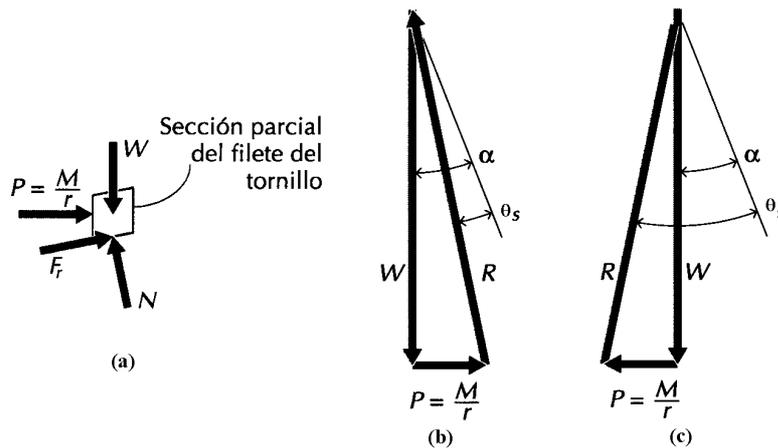


Fig. III-17 Fuerzas en una rosca de sección rectangular con el tornillo a punto de bajar

En esta situación se pueden dar dos casos:

- Si $\alpha > \theta_s$ El tornillo bajará solo (la rosca será reversible) y se deberá aplicar un par si se desea que el tornillo no baje. En este caso se puede utilizar como un mecanismo para transformar un movimiento rectilíneo en movimiento giratorio.
- Si $\alpha < \theta_s$ El tornillo no deslizará (la rosca será irreversible) y se deberá aplicar un par si se desea bajar el tornillo.

Cuando $\alpha > \theta_s$, figura (III-17(b)), el momento a aplicar para que no baje el tornillo será:

$$M = P \cdot r = r \cdot W \cdot \text{tg}(\alpha - \theta_s) \quad (\text{III-38})$$

Cuando $\alpha < \theta_s$, figura (III-17(c)), el momento a aplicar para que baje el tornillo será:

$$M = P \cdot r = r \cdot W \cdot \text{tg}(\theta_s - \alpha) \quad (\text{III-39})$$

III.5 - COJINETES DE SUSTENTACIÓN

Un cojinete de sustentación es un apoyo para soportar a un eje sometido a una fuerza radial, tal como se observa en la figura (III-18). El eje se introduce en el cojinete con una determinada holgura, sino resultaría imposible hacerlo girar.

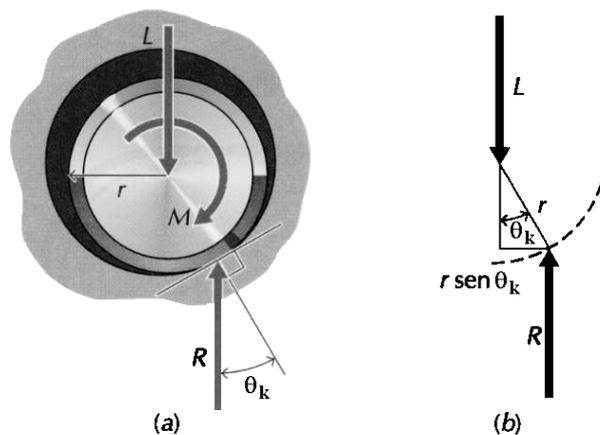


Fig. III-18 Cojinete de sustentación

Si entre el cojinete y el eje se introduce lubricación, el cálculo de rozamiento sería un problema de Mecánica de Fluidos.

Si no existe lubricación, se regirá por las leyes de rozamiento seco. En este caso, al girar el eje intentará rodar sin deslizamiento por el interior del cojinete hasta que llegue a un punto en el que la tangente al eje en el punto de contacto forme un ángulo " θ_k " con horizontal, momento en el que el eje empieza a deslizar sobre el cojinete. Siendo:

$$\theta_k = \text{arc. tg } \mu_k \quad (\text{III-40})$$

En este punto el eje estará en equilibrio, apareciendo las fuerzas de la figura (III-18(b)).

$$R = L \quad (\text{III-41})$$

$$M = L \cdot r \cdot \text{sen } \theta_k \quad (\text{III-42})$$

Siendo:

- L = Fuerza radial sobre el eje.
- R = Resultante de las fuerzas normal y de rozamiento.
- θ_k = Ángulo entre la normal y la resultante.
- r = Radio del eje.
- M = Momento a aplicar para hacer girar al eje

Los materiales de los cojinetes de sustentación y de los ejes se escogen de forma que tengan un coeficiente de rozamiento " μ_k " bajo, y por tanto, el ángulo " θ_k " será pequeño. En este caso se puede sustituir el valor del seno por el de la tangente, resultando que el momento a aplicar al eje para hacerle girar venciendo el rozamiento será:

$$M = \mu_k \cdot r \cdot L \quad (\text{III-43})$$

III.6 - COJINETES DE EMPUJE

Los cojinetes de empuje se utilizan para soportar las fuerzas en la dirección axial del eje, tal como se observa en la figura (III-19).

En estos cojinetes, la superficie de contacto entre el eje y el cojinete es o un círculo o una corona circular.

En este caso se estudiará teniendo en cuenta que el rozamiento entre el eje y el cojinete se produce sin lubricación, es decir rozamiento seco.

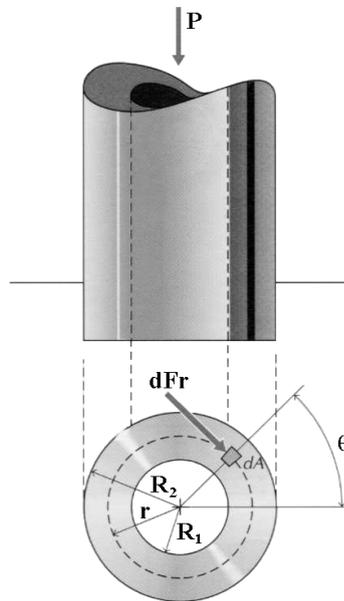


Fig. III-19 Cojinete de empuje

III.6.1 - Cojinete de empuje a presión constante

Si en la superficie de contacto entre el eje y el cojinete, suponiendo que la presión es constante en toda la superficie, se considera un área diferencial "dA", sobre ella actuará una fuerza normal diferencial

$$dP = p \cdot dA \quad (\text{III-44})$$

Al girar el eje, en el área diferencial aparecerá una fuerza de rozamiento diferencial

$$dFr = \mu_k \cdot dP \quad (\text{III-45})$$

Para vencer a esta fuerza de rozamiento habrá que aplicar un momento diferencial

$$dM = r \cdot dFr = r \cdot \mu_k \cdot p \cdot dA \quad (\text{III-46})$$

En este caso, la fuerza axial que actúa sobre el eje será:

$$P = p \cdot A = p \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2) \quad (\text{III-47})$$

Teniendo en cuenta que:

$$dA = r \cdot d\theta \cdot dr \quad (\text{III-48})$$

El momento a aplicar al eje para hacerle girar venciendo el rozamiento será:

$$\begin{aligned} M &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} dM = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \mu_k \cdot p \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\theta = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \mu_k \cdot p \cdot r^2 \cdot dr \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot p \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot p \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{2}{3} \pi \cdot \mu_k \cdot p \cdot (R_2^3 - R_1^3) \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

Y como el valor de "p" obtenido de la ecuación (III-47) es:

$$p = \frac{P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \quad (\text{III-50})$$

Resultará que el momento en función de la fuerza axial será:

$$M = \frac{2\mu_k P (R_2^3 - R_1^3)}{3(R_2^2 - R_1^2)} \quad (\text{III-51})$$

Si el eje fuese macizo, entonces "R₁" sería cero, y la fuerza axial y el momento serían:

$$P = p \cdot \pi \cdot R^2 \quad (\text{III-52})$$

$$M = \frac{2}{3} \mu_k P \cdot R \quad (\text{III-53})$$

III.6.2 - Cojinete de empuje a desgaste constante

En un cojinete de empuje nuevo, la presión será la misma por toda la superficie de contacto. Al cabo de un tiempo de funcionamiento, debido a que la velocidad de deslizamiento es mayor en la parte exterior, esta parte se desgastará más, disminuyendo la presión hasta que llegue un momento en el que

el reparto de presiones sea tal que haga que el desgaste vaya siendo constante por toda la superficie de contacto.

Suponiendo que el desgaste es proporcional a la potencia gastada por la fuerza de rozamiento y la velocidad de deslizamiento, se tendrá que la potencia de desgaste en una unidad de área será:

$$W_d = Fr \cdot V = \mu_k \cdot p \cdot l \cdot \omega r \quad (\text{III-54})$$

Como " μ_k " y " ω " son constantes para toda la superficie, se tendrá que el desgaste será constante cuando sea constante la potencia de desgaste por unidad de área en toda la superficie de contacto, y esto se producirá cuando:

$$p \cdot r = \text{cte.} \quad (\text{III-55})$$

En la figura (III-20) se representa la variación de la presión en función del radio en un cojinete de empuje para que se cumpla la ley de " $p \cdot r = C$ " de desgaste constante.

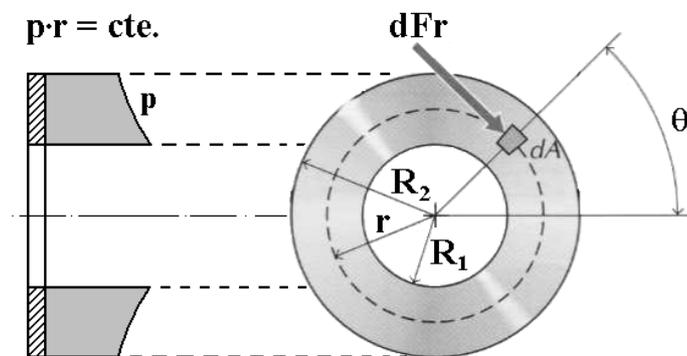


Fig. III-20 Cojinete de empuje a desgaste constante

La fuerza axial que actúa sobre el eje será:

$$\begin{aligned} P &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} p \cdot dA = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \int_{R_1}^{R_2} C \cdot dr \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot C \cdot \int_{R_1}^{R_2} dr = 2 \cdot \pi \cdot C \cdot [r]_{R_1}^{R_2} = 2 \pi \cdot C \cdot (R_2 - R_1) \end{aligned} \quad (\text{III-56})$$

Despejando "C" de la ecuación de la ecuación (III-56) se obtiene:

$$C = p \cdot r = p_{\max} \cdot R_1 = p_{\min} \cdot R_2 = \frac{P}{2\pi(R_2 - R_1)} \quad (\text{III-57})$$

El momento a aplicar al eje para hacerle girar venciendo el rozamiento será:

$$\begin{aligned} M &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} dM = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \mu_k \cdot p \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\theta = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \mu_k \cdot \frac{C}{r} \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\theta \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \mu_k \cdot C \cdot r \cdot dr \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot C \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot C \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} = \pi \cdot \mu_k \cdot C \cdot (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned} \quad (\text{III-58})$$

Sustituyendo el valor de "C" de la ecuación (III-57) se tendrá:

$$M = \frac{\mu_k \cdot P \cdot (R_2 + R_1)}{2} \quad (\text{III-59})$$

Si el eje fuese macizo, aunque no es recomendable porque en el centro aparecerían presiones teóricamente de infinito, el momento sería:

$$M = \frac{\mu_k \cdot P \cdot R}{2} \quad (\text{III-60})$$

III.7 - FRENOS Y EMBRAGUES DE DISCO

En los frenos y embragues de disco, las superficies en las que se produce el contacto, y por tanto la fricción, son similares a las superficies de contacto de los cojinetes de empuje.

Para que un freno o embrague de disco pueda transmitir un momento, que será el momento de rozamiento, es necesario aplicar una fuerza axial "P" para comprimir las superficies en contacto.

Los frenos y embragues de disco se puede considerar que trabajan a presión o a desgaste constante.

Trabajarán a desgaste constante cuando las superficies en contacto pertenecen a sólidos rígidos que no cambiarán su posición cuando se desgasten más en la parte exterior.

Se considerará que trabajan a presión constante cuando al desgastarse más en la parte exterior, la superficie en contacto se puede reorientar manteniendo la presión constante.

III.7.1 - Frenos y embragues de disco a presión constante

Los frenos y embragues de disco a presión constante son similares a los cojinetes de empuje a presión constante, y por tanto, se aplican las mismas ecuaciones para la fuerza axial y para el momento:

$$\begin{aligned}
 - \quad P &= p \cdot A = p \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2) \\
 - \quad M &= \frac{2\mu_k P (R_2^3 - R_1^3)}{3(R_2^2 - R_1^2)}
 \end{aligned}$$

III.7.2 - Frenos y embragues de disco a desgaste constante

Los frenos y embragues a desgaste constante son similares a los cojinetes de empuje a desgaste constante y las ecuaciones para la fuerza axial y para el momento serán:

$$\begin{aligned}
 - \quad P &= 2\pi \cdot C \cdot (R_2 - R_1) \\
 - \quad C &= p \cdot r \\
 - \quad M &= \frac{\mu_k \cdot P \cdot (R_2 + R_1)}{2}
 \end{aligned}$$

III.8 - FRENOS Y EMBRAGUES CÓNICOS

En los frenos y embragues cónicos, figura (III-21), las superficies de fricción son conos. Al igual que los frenos y embragues de disco, pueden trabajar a presión o a desgaste constante, dependiendo del diseño de los mismos.

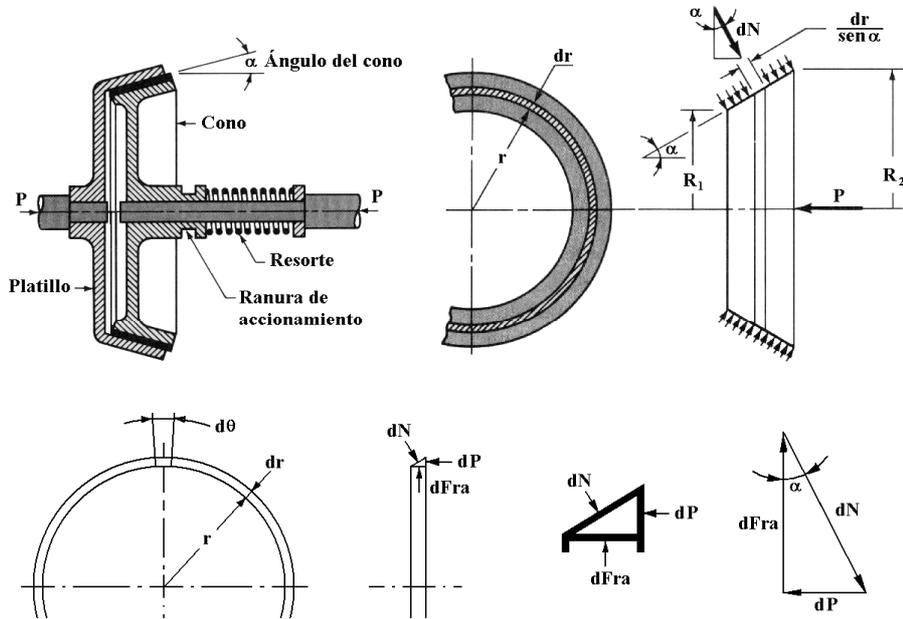


Fig. III-21 Freno o embrague cónico

Para que un freno o embrague cónico pueda transmitir un par es necesario aplicar una fuerza axial "P" para que aparezca una presión en las superficies de contacto.

Tomando una cuña diferencial ($d\theta \times dr$) del anillo también diferencial y planteando el equilibrio de fuerzas se tendrá unas fuerzas normal, axial y radial diferenciales de valores:

$$dN = p \cdot dA \quad (III-61)$$

$$dP = dN \operatorname{sen} \alpha \quad (III-62)$$

$$dF_{\text{rad}} = dN \operatorname{cos} \alpha \quad (III-63)$$

El diferencial de área sobre el que actúa la fuerza normal será:

$$dA = \frac{r \cdot dr \cdot d\theta}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (III-64)$$

La fuerza radial será absorbida por el material, equilibrándose con la fuerza radial de la cuña simétrica.

Debido a la fuerza normal, aparecerá sobre la cuña una fuerza de rozamiento:

$$dF_r = \mu_k \cdot dN = \mu_k \cdot p \cdot dA = \frac{\mu_k \cdot p \cdot r \cdot d\theta \cdot dr}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{III-65})$$

Y para vencer a esta fuerza de rozamiento se necesitará un momento diferencial:

$$dM = dF_r \cdot r = \mu_k \cdot r \cdot dN = \mu_k \cdot p \cdot r \cdot dA = \frac{\mu_k \cdot p \cdot r^2 \cdot d\theta \cdot dr}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{III-66})$$

III.8.1 - Frenos y embragues cónicos a presión constante

En este tipo de frenos y embragues la presión es constante en toda la superficie cónica de contacto.

La fuerza axial aplicada sobre los ejes del plato y del cono será:

$$\begin{aligned} P &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} dP = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \alpha \cdot dN = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \alpha \cdot p \cdot dA = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \alpha \cdot p \cdot \frac{r \cdot d\theta \cdot dr}{\text{sen } \alpha} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} p \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} p \cdot r \cdot dr \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 2 \cdot \pi \cdot p \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot p \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} = \\ &= \pi \cdot p \cdot (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned} \quad (\text{III-67})$$

De la ecuación (III-67) se obtiene que la presión en la superficie de contacto será:

$$p = \frac{P}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)} \quad (\text{III-68})$$

El momento que será capaz de transmitir el freno o embrague será:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} dM = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_k \cdot p \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\theta}{\text{sen } \alpha} = \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_k \cdot p \cdot r^2 \cdot dr}{\text{sen } \alpha} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot p}{\text{sen } \alpha} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr = \\
 &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot p}{\text{sen } \alpha} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot p \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{3 \text{ sen } \alpha} \quad \text{(III-69)}
 \end{aligned}$$

Y sustituyendo el valor de "p" por la ecuación (III-68) se tendrá:

$$M = \frac{2 \cdot \mu_k \cdot P \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{3 \cdot \text{sen } \alpha \cdot (R_2^2 - R_1^2)} \quad \text{(III-70)}$$

III.8.2 - Frenos y embragues cónicos a desgaste constante

En este tipo de frenos y embragues, al igual que en los cojinetes de empuje, al cabo de un tiempo de uso se llegará a la situación de desgaste constante cumpliéndose que:

$$C = p \cdot r \quad \text{(III-71)}$$

La fuerza axial aplicada sobre los ejes del plato y del cono será:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} dP = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \alpha \cdot dN = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \alpha \cdot p \cdot dA = \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \alpha \cdot \frac{C \cdot r \cdot d\theta \cdot dr}{r \cdot \text{sen } \alpha} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} C \cdot dr \cdot d\theta = \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} C \cdot dr \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 2 \cdot \pi \cdot C \cdot \int_{R_1}^{R_2} dr = 2 \cdot \pi \cdot C \cdot [r]_{R_1}^{R_2} = \\
 &= 2 \cdot \pi \cdot C \cdot (R_2 - R_1) \quad \text{(III-72)}
 \end{aligned}$$

De la ecuación (III-72) se puede obtener el valor de la constante

$$C = p \cdot r = p_{\max} \cdot R_1 = p_{\min} \cdot R_2 = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot (R_2 - R_1)} \quad (\text{III-73})$$

El momento que será capaz de transmitir el freno o embrague será:

$$\begin{aligned} M &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} dM = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_k \cdot p \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\theta}{\text{sen } \alpha} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_k \cdot C \cdot r \cdot dr \cdot d\theta}{\text{sen } \alpha} = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_k \cdot C \cdot r \cdot dr}{\text{sen } \alpha} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot C}{\text{sen } \alpha} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr = \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot C}{\text{sen } \alpha} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi \cdot \mu_k \cdot C \cdot (R_2^2 - R_1^2)}{\text{sen } \alpha} \end{aligned} \quad (\text{III-74})$$

Y sustituyendo "C" por su valor según la ecuación (III-73) se obtendrá:

$$M = \frac{\mu_k \cdot P \cdot (R_2 + R_1)}{2 \cdot \text{sen } \alpha} \quad (\text{III-75})$$

III.9 - FRENOS Y EMBRAGUES CENTRÍFUGOS

Los frenos o embragues centrífugos, figura (III-22), están constituidos por un núcleo motriz sobre el que están montadas una serie de masas centrífugas que giran con él, pero que se pueden desplazar radialmente. Estas masas se mantienen pegadas al núcleo motriz por medio del muelle de retención. Al ir aumentando la velocidad del eje de entrada, las masas centrífugas se desplazan hacia el exterior venciendo la tensión del muelle debido a la fuerza centrífuga. Al desplazarse hacia el exterior, el material de fricción de las masas centrífugas contacta con el envolvente receptor transmitiendo un par al eje de salida.

Considerando que un freno o embrague de este tipo tiene muchas masas centrífugas, se puede suponer que la presión en la superficie de fricción es uniforme.

Tomando un diferencial de masa centrífuga, se puede plantear el equilibrio de fuerzas en dirección radial:

$$dN = dF_c - 2 \cdot T \cdot \sin \frac{d\theta}{2} \quad (\text{III-76})$$

Siendo "T" la tensión del muelle y y:

$$dF_c = \omega^2 \cdot r_G \cdot dm \quad (\text{III-77})$$

Con " ω ", velocidad angular del eje y "dm", masa diferencial de la masa centrífuga.

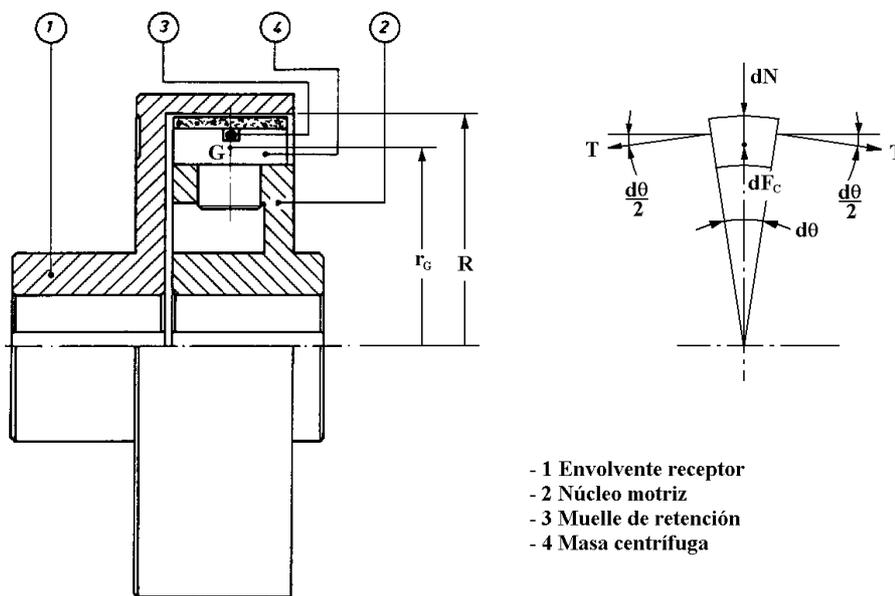


Fig. III-22 Freno o embrague centrífugo

Al ser " $d\theta$ " un ángulo diferencial, se puede sustituir el seno por el ángulo resultando:

$$dN = dF_c - 2 \cdot T \cdot \frac{d\theta}{2} = \omega^2 \cdot r_G \cdot dm - T \cdot d\theta \quad (\text{III-78})$$

La fuerza normal diferencial producirá una fuerza de rozamiento diferencial:

$$dF_r = \mu_k \cdot dN = \mu_k \cdot \omega^2 \cdot r_G \cdot dm - \mu_k \cdot T \cdot d\theta \quad (\text{III-79})$$

Para vencer la fuerza de rozamiento diferencial habrá que aplicar un momento diferencial:

$$dM = R \cdot dF_r = \mu_k \cdot \omega^2 \cdot r_G \cdot R \cdot dm - \mu_k \cdot T \cdot R \cdot d\theta \quad (\text{III-80})$$

Integrando para toda la circunferencia se tendrá que el momento capaz de transmitir por un freno o embrague centrífugo será:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} dM = \int_0^{2\pi} \mu_k \cdot \omega^2 \cdot r_G \cdot R \cdot dm - \int_0^{2\pi} \mu_k \cdot T \cdot R \cdot d\theta = \\ &= \mu_k \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r_G \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot T \cdot R \end{aligned} \quad (\text{III-81})$$

Siendo:

- μ_k = Coeficiente de rozamiento dinámico.
- m = Masa total de las masa centrífugas.
- r_G = Radio del centro de gravedad de una masa centrífuga.
- R = Radio de la superficie de fricción.
- T = Tensión del muelle.

Con este tipo de frenos o embragues, teniendo en cuenta la tensión del muelle, se puede conseguir que no transmitan par hasta llegar a una determinada velocidad angular.

III.10 - FRENOS Y EMBRAGUES RADIALES DE ACCIONAMIENTO NEUMÁTICO

Estos mecanismos están formados por una serie de elementos de fricción, dispuestos bien en forma de tubo, figura (III-23), o de eje, que giran solidarios a una carcasa, pero que se pueden desplazar radialmente accionados por un neumático que los abraza. Si los elementos de fricción están dispuestos en forma de tubo, al enviar aire a presión al neumático, se cierran contra un tambor exterior y le transmiten un par por rozamiento. En cambio, si los elementos están dispuestos en forma de eje, se expanden contra un tambor interior.

Teniendo en cuenta que un mecanismo de este tipo tiene muchos elementos de fricción, se puede considerar que la presión será constante en toda

la superficie de fricción. También se puede considerar, con mucha aproximación, que la presión del neumático se ejerce sobre un cilindro del mismo diámetro que el cilindro sobre el que se produce la fricción.

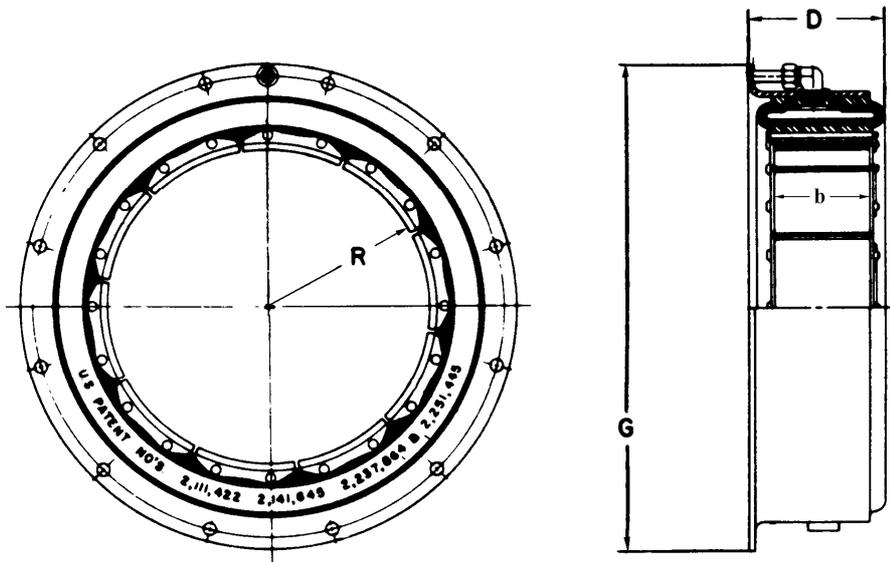


Fig. III-23 Freno o embrague radial de accionamiento neumático

Si se considera un elemento de fricción diferencial correspondiente a un ángulo " $d\theta$ ", sobre él aparecerá una fuerza normal diferencial:

$$dN = p \cdot dA = p \cdot b \cdot R \cdot d\theta \quad (\text{III-82})$$

Debida a la fuerza normal diferencial, aparecerá una fuerza de rozamiento diferencial:

$$dF_r = \mu_k \cdot dN = \mu_k \cdot p \cdot b \cdot R \cdot d\theta \quad (\text{III-83})$$

Para vencer a la fuerza de rozamiento diferencial habrá que aplicar un par diferencial:

$$dM = \mu_k \cdot R \cdot dN = \mu_k \cdot p \cdot b \cdot R^2 \cdot d\theta \quad (\text{III-84})$$

Integrando a lo largo de toda la circunferencia se obtendrá el par que es capaz de transmitir un freno o embrague de este tipo

$$M = \int_0^{2\pi} dM = \int_0^{2\pi} \mu_k \cdot p \cdot b \cdot R^2 \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \mu_k \cdot p \cdot b \cdot R^2 = \mu_k \cdot p \cdot A \cdot R \quad (\text{III-85})$$

III.11 - LIMITADORES DE PAR

Existen muchos tipos de limitadores de par, basados en diferentes sistemas de interrupción de la transmisión de movimiento cuando el par alcanza un valor determinado.

En el presente apartado se estudia el limitador de par representado en la figura (III-24) basado en el rozamiento. Este limitador está formado por una serie de elementos de fricción de sección trapezoidal que en conjunto forman un anillo. Este anillo se apoya sobre las superficies cónicas del núcleo y del cono móvil y se mantiene en contacto sobre ellas por medio de la tensión de un muelle que abraza a los elementos de fricción. Al desplazar el cono móvil hacia el cono del núcleo, el anillo se expande entrando en contacto con la camisa y transmitiendo un determinado par.

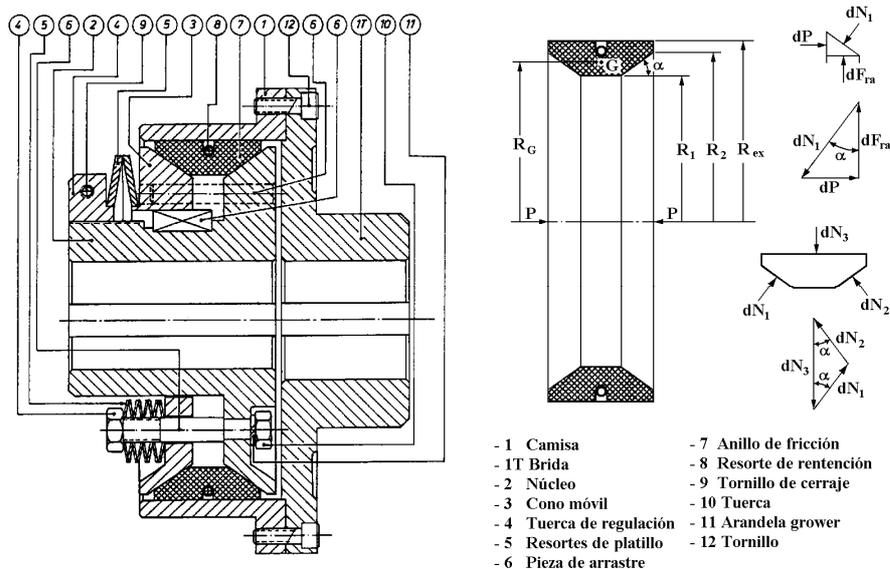


Fig. III-24 Limitador de par

El cono móvil y el núcleo giran solidarios transmitiendo el movimiento al anillo de elementos de fricción. El cono móvil se puede desplazar axialmente sobre el núcleo con el fin de expandir al anillo de elementos de fricción.

El par que le transmiten al anillo de elementos de fricción, en función de la fuerza axial "P" aplicada al cono móvil, se puede calcular como en los frenos o embragues cónicos, que considerando por ejemplo a desgaste constante, ecuación (III-75), y teniendo en cuenta que son dos superficies cónicas, será:

$$M = \frac{\mu \cdot P \cdot (R_2 + R_1)}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{III-86})$$

Tomando una cuña diferencial del cono móvil se tendrá que sobre ella actúan un diferencial de fuerza axial "dP", un diferencial de fuerza de fuerza radial "dF_{ra}" que será absorbida por el material y equilibrada por la fuerza radial de la cuña simétrica y una fuerza diferencial sobre la superficie cónica "dN₁", de la figura (III-24) se desprende que:

$$dN_1 = \frac{dP}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{III-87})$$

Considerando ahora un elemento diferencial del anillo de fricción se tendrá que sobre las superficies cónicas actúan "dN₁" y "dN₂", que debido a la simetría del anillo serán iguales en módulo, y sobre la superficie cilíndrica actuará "dN₃". En la figura (III-24) se observa que:

$$dN_3 = (dN_1 + dN_1) \cdot \cos \alpha = 2 \cdot dN_1 \cdot \cos \alpha = \frac{2 \cdot dP}{\text{tg } \alpha} \quad (\text{III-88})$$

La fuerza normal "dN₃" producirá una fuerza diferencial de rozamiento:

$$dF_r = \mu \cdot dN_3 = \frac{2 \cdot \mu \cdot dP}{\text{tg } \alpha} \quad (\text{III-89})$$

Para vencer a la fuerza de rozamiento habrá que aplicar un momento diferencial:

$$dM = R_{\text{ex}} \cdot dF_r = \frac{2 \cdot \mu \cdot R_{\text{ex}} \cdot dP}{\text{tg } \alpha} \quad (\text{III-90})$$

Integrando a lo largo de toda la superficie cilíndrica se tendrá que el momento capaz de transmitir en dicha superficie, debido a la fuerza axial "P", será:

$$M = \frac{2 \cdot \mu \cdot R_{\text{ex}} \cdot P}{\text{tg } \alpha} \quad (\text{III-91})$$

Si se tiene en cuenta la tensión del muelle que abraza a los elementos de fricción y la fuerza centrífuga que actúa sobre ellos, tomando la ecuación (III-81), se tendrá que el par capaz de transmitir en la superficie cilíndrica será:

$$M = \frac{2 \cdot \mu \cdot R_{ex} \cdot P}{\operatorname{tg} \alpha} + \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R_G \cdot R_{ex} - 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot T \cdot R_{ex} \quad (\text{III-92})$$

El par para el cual actuará el limitador será el menor de los valores obtenidos por las ecuaciones (III-86) y (III-92).

III.12 - TRANSMISIONES POR CORREAS

Las correas se utilizan para transmitir el movimiento entre ejes relativamente alejados.

Los ejes entre los que se transmite el movimiento normalmente son paralelos. En este caso se puede hacer que los dos ejes giren el mismo sentido montando la correa de forma normal o que giren en sentido contrario montando la correa cruzada.

Tomando precauciones también se puede transmitir movimiento entre ejes que se cruzan.

Despreciando el deslizamiento entre la correa y las poleas, como la velocidad de la correa es la misma en las dos poleas se cumple que:

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2 \quad (\text{III-93})$$

De esta ecuación se desprende que la relación de transmisión será:

$$u = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{III-94})$$

Para poder transmitir una determinada potencia por medio de una correa, ésta se debe montar sobre las poleas con una determinada tensión, figura (III-25). Si la correa no transmite potencia, las tensiones en las dos ramas de la correa "T₁" y "T₂" serán iguales.

$$T_1 = T_2 = T_0 \quad (\text{III-95})$$

Cuando la correa transmite potencia aumenta la tensión en la rama de la correa arrastrada por la polea motora. Como la correa tiene algo de flexibilidad, la rama arrastrada se estirará, pasando el exceso de longitud a la otra rama de la correa disminuyendo su tensión.

En una transmisión por correa se cumplirá que la potencia transmitida en cada polea será el producto del par por la velocidad angular:

$$W = M_1 \cdot \omega_1 = M_2 \cdot \omega_2 \quad (\text{III-96})$$

En la figura (III-25) se observa que:

$$M_1 = R_1 \cdot (T_2 - T_1) \quad (\text{III-97})$$

$$M_2 = R_2 \cdot (T_2 - T_1) \quad (\text{III-98})$$

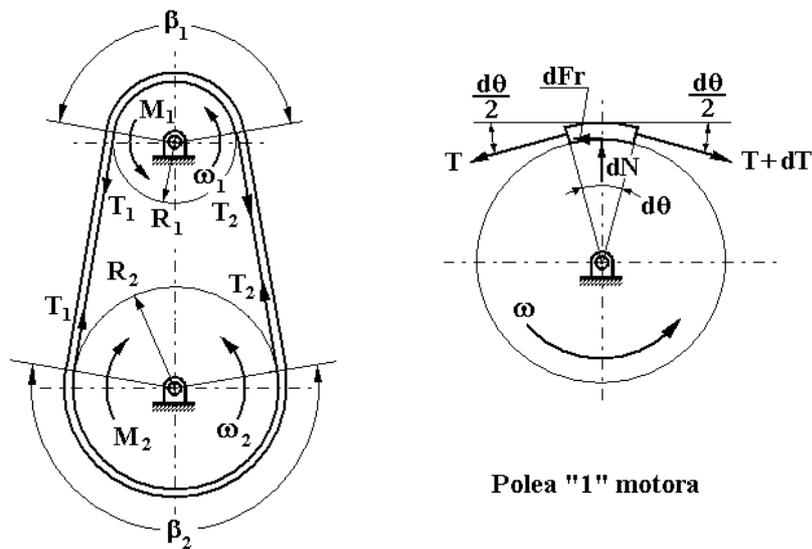


Fig. III-25 Transmisión por correa

III.12.1 - Correas planas

Las correas planas son unas bandas planas que abrazan a unas poleas cilíndricas.

Para determinar la relación entre las tensiones de las dos ramas de la correa se toma un elemento diferencial de correa sobre la polea motora. Haciendo el diagrama de cuerpo libre del elemento diferencial de correa se tendrá que sobre él actúan: Una fuerza normal "dN", una fuerza de rozamiento "dFr", por un lado una tensión "T" y por el otro lado una tensión "T+dT".

Planteando el equilibrio del elemento diferencial se tendrá:

$$\Sigma F_x = (T + dT) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - dFr = 0 \quad (\text{III-99})$$

$$\Sigma F_y = dN - T \cdot \text{sen} \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \cdot \text{sen} \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (\text{III-100})$$

Operando con la ecuación (III-99) y teniendo en cuenta que "dθ" es un valor diferencial resultará:

$$\cos \frac{d\theta}{2} \cong 1 \quad (\text{III-101})$$

$$dT = dFr \quad (\text{III-102})$$

Y realizando el cálculo para el caso de deslizamiento inminente se tendrá:

$$dT = \mu \cdot dN \quad (\text{III-103})$$

Operando con la ecuación (III-100) y teniendo en cuenta que "dθ" es un valor diferencial resultará:

$$\text{sen} \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2} \quad (\text{III-104})$$

$$\text{sen} \frac{d\theta}{2} \cdot dT \cong 0 \quad (\text{III-105})$$

$$dN = T \cdot d\theta \quad (\text{III-106})$$

Sustituyendo la ecuación (III-106) en la (III-103) y ordenando términos se obtiene:

$$\frac{dT}{T} = \mu \cdot d\theta \quad (\text{III-107})$$

Integrado se obtiene:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu \cdot d\theta \quad (\text{III-108})$$

$$[\ln T]_{T_1}^{T_2} = \mu[\theta]_0^\beta \quad (\text{III-109})$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu \cdot \beta \quad (\text{III-110})$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \cdot \beta \quad (\text{III-111})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu \cdot \beta} \quad (\text{III-112})$$

$$T_2 = T_1 \cdot e^{\mu \cdot \beta} \quad (\text{III-113})$$

Con las ecuaciones (III-96), (III-97), (III-98) y (III-113) se obtiene las relaciones entre las tensiones de las dos ramas de la correa en el punto de deslizamiento inminente. En estas ecuaciones también se observa, que para un mismo coeficiente de rozamiento entre las poleas y la correa, habrá deslizamiento antes en la polea menor por tener un menor ángulo abrazado por la correa.

Para que una correa tenga un buen funcionamiento sin deslizamiento se deberá cumplir que:

$$T_2 < T_1 \cdot e^{\mu \cdot \beta} \quad (\text{III-114})$$

III.12.2 - Correas trapeciales

En las correas trapeciales el contacto de la correa con la polea no se produce sobre una superficie cilíndrica como en las planas, sino en los laterales de una canal de sección trapecial igual que la de la correa.

En estas correas, (figura 26), el "dF_r" viene originado por los dos "dF" que actúan en los laterales de la correa y la fuerza "dN" será la suma vectorial de los dos "dF". En este caso se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_x = (T + dT) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - dF_r = 0 \quad (\text{III-115})$$

$$\Sigma F_y = dN - T \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (\text{III-116})$$

Operando con la ecuación (III-115) y teniendo en cuenta que "dθ" es un valor diferencial resultará:

$$\cos \frac{d\theta}{2} \cong 1 \quad (\text{III-117})$$

$$dT = dFr \quad (\text{III-118})$$

Y realizando el cálculo para el caso de deslizamiento inminente se tendrá:

$$dT = 2 \cdot \mu \cdot dF \quad (\text{III-119})$$

Operando con la ecuación (III-116) y teniendo en cuenta que "dθ" es un valor diferencial resultará:

$$\text{sen} \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2} \quad (\text{III-120})$$

$$\text{sen} \frac{d\theta}{2} \cdot dT \cong 0 \quad (\text{III-121})$$

$$dN = T \cdot d\theta \quad (\text{III-122})$$

El la figura 26 se observa que:

$$dN = 2 dF \cdot \text{sen} \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III-123})$$

Despejando "dF" se obtendrá:

$$dF = \frac{dN}{2 \cdot \text{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{T \cdot d\theta}{2 \cdot \text{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{III-124})$$

Sustituyendo la ecuación (III-124) en la (III-119) y ordenando términos se obtiene:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot d\theta = \mu^{\text{eq}} \cdot d\theta \quad (\text{III-125})$$

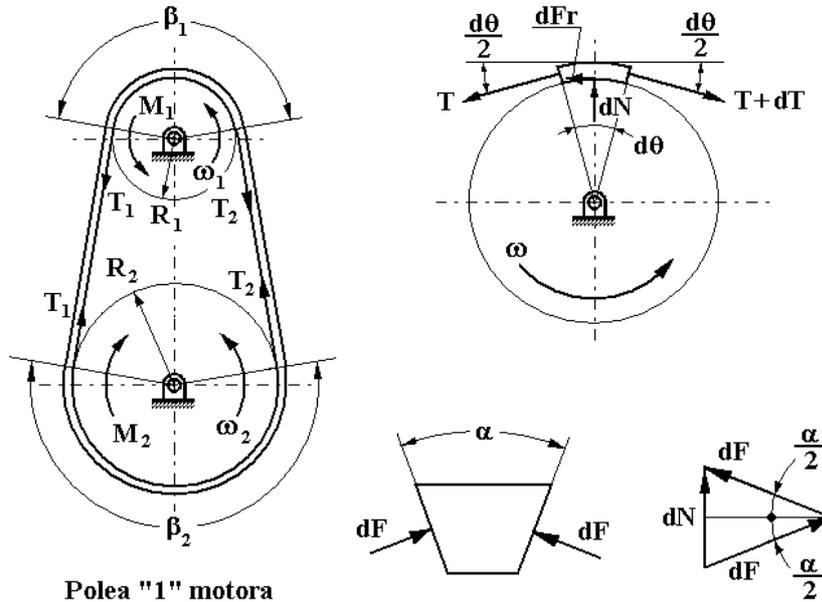


Fig. III-26 Correas trapeciales

Si siguiendo el mismo proceso de integración que en las correas planas, se obtendrá:

$$T_2 = T_1 \cdot e^{\mu_{eq} \cdot \beta} \quad (III-126)$$

Siendo:

$$\mu_{eq} = \frac{\mu}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad (III-127)$$

El ángulo " α " de las correas trapeciales suele ser del orden de 40° , con lo que resulta que " μ_{eq} " es aproximadamente tres veces mayor que " μ ", por tanto las correas trapeciales se comportan como una correa plana que tuviese un coeficiente de rozamiento tres veces mayor.

Con correas trapeciales, cuando la diferencia de diámetros de las poleas es muy grande, se suele utilizar la polea menor acanalada y la polea mayor cilíndrica por razones de economía de fabricación. En estos casos la correa se comporta como trapecial en la polea pequeña y como plana en la polea grande, ya que debido al ángulo " β ", en la polea mayor es más difícil que deslice.

III.13 - FRENOS DE CINTA

Si se dispone una cinta o una correa plana o trapecial sobre un volante, tal como se observa en la figura 27, se puede conseguir un par de frenado sobre el volante, consiguiéndose de este modo un freno de cinta.

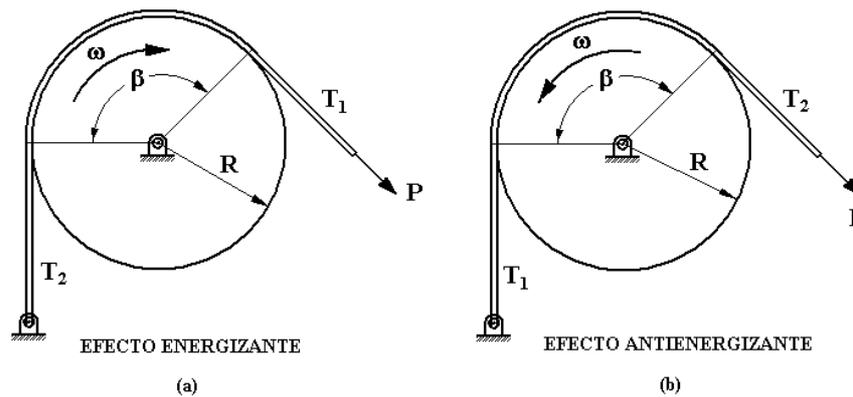


Fig. III-27 Freno de cinta

Tomando momentos respecto del centro del volante, en los dos casos de la figura, el par de frenado será:

$$M = R \cdot (T_2 - T_1) \quad \text{(III-128)}$$

Y la relación entre las tensiones de las dos ramas de la cinta sigue la misma ley que las transmisiones por correas, por tanto será:

$$T_2 = T_1 \cdot e^{\mu \cdot \beta} \quad \text{(III-129)}$$

Debido al rozamiento, el volante tiende a arrastrar a la cinta en el sentido de giro, por tanto en el caso (a) se tendrá una tensión "T₂" en la rama de la izquierda y una tensión "T₁" en la rama de la derecha y en el caso (b) ocurrirá al contrario.

En el caso (a), debido a la dirección de giro del volante, la fuerza a aplicar al freno "P" será igual a "T₁" que es la tensión menor, consiguiéndose un efecto energizante.

En cambio en el caso (b), debido a la dirección de giro del volante, la fuerza a aplicar al freno "P" será igual a "T₂" que es la tensión mayor, consiguiéndose un efecto antienergizante.

III.14 - FRENOS Y EMBRAGUES DE ZAPATAS

En las máquinas se utilizan gran variedad de frenos de zapata. En todos ellos el proceso de cálculo es similar:

- Determinar la distribución de presiones en la superficie de fricción.
- Hallar una relación entre la presión máxima y la presión de un punto cualquiera.
- Aplicar las condiciones de equilibrio estático de la zapata para determinar la fuerza y el momento de rotación ejercidos y las reacciones en los apoyos.

III.14.1 - Zapata lineal

En la figura (III-28) se muestra una zapata lineal. Esta zapata está articulada en el punto "A" y al aplicar una fuerza "F", en la superficie de contacto aparece una fuerza normal "N", la cual, produce una fuerza de fricción "F_r" sobre la superficie que se desliza bajo la zapata.

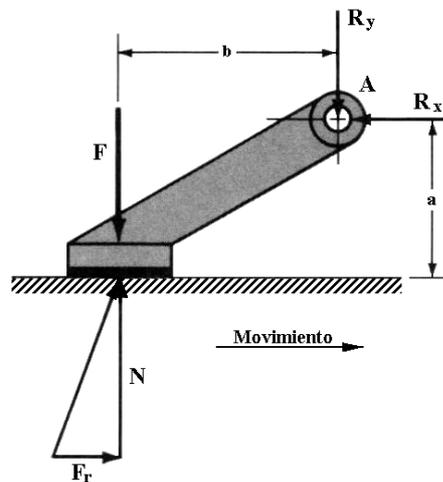


Fig. III-28 Zapata lineal

Teniendo en cuenta que la superficie de la zapata es pequeña, se puede suponer que la presión en toda la superficie será constante, resultando:

$$N = p \cdot A \quad \text{(III-130)}$$

Planteando las ecuaciones de equilibrio de la zapata se tendrá:

$$\Sigma F_x = F_r - R_x = 0 \quad (\text{III-131})$$

$$\Sigma F_y = N - F - R_y = 0 \quad (\text{III-132})$$

$$\Sigma M_A = F \cdot b - N \cdot b + F_r \cdot a = 0 \quad (\text{III-133})$$

Cuando se produce deslizamiento se tendrá:

$$F_r = \mu \cdot N \quad (\text{III-134})$$

Despejando "F" de la ecuación (III-133) se obtendrá:

$$F = \frac{N \cdot (b - \mu \cdot a)}{b} \quad (\text{III-135})$$

De la ecuación (III-135) se desprende que la fuerza normal "N" es mayor que la fuerza aplicada "F", con lo que se consigue un efecto energizante.

Si debido a la geometría de la zapata y al coeficiente de rozamiento se cumpliera que $\mu \cdot a \geq b$, la zapata se autobloquearía, apareciendo una fuerza "N" tendiendo a infinito para una pequeña fuerza "F".

Si el desplazamiento de la superficie bajo la zapata fuese en el otro sentido, se conseguiría un efecto antienergizante, cumpliéndose:

$$F = \frac{N \cdot (b + \mu \cdot a)}{b} \quad (\text{III-136})$$

III.14.2 - Frenos y embragues de tambor con zapatas interiores

Frenos o embragues de tambor con zapatas interiores se pueden construir de diferentes tipos. Un tipo muy corriente es el representado en la figura (III-29).

En este tipo de freno o embrague, la zapata está articulada en el punto "A" y en el otro extremo de la zapata se le aplica una fuerza "F" para conseguir una fuerza normal entre el material de fricción y el tambor giratorio con el fin de conseguir un par de frenado en el tambor.

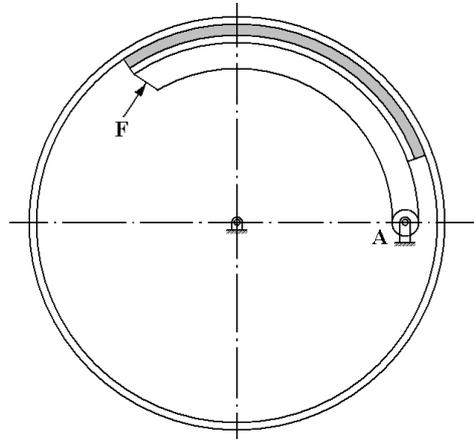


Fig. III-29 Zapata articulada interior

Para determinar la ley de presiones a lo largo de la zapata, se supone que la presión será proporcional al desplazamiento normal hacia el tambor de un punto "P" cualquiera de la zapata al girar ésta un determinado ángulo " $\delta\phi$ " alrededor de la articulación "A".

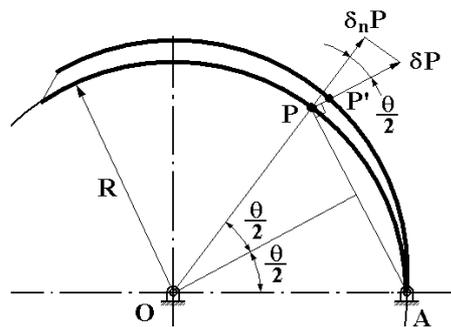


Fig. III-30 Desplazamientos de los puntos de la zapata

El desplazamiento del punto "P", según se observa en la figura (III-30), será:

$$\delta P = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \delta\phi \quad (\text{III-137})$$

Y el desplazamiento del punto "P" en dirección normal al tambor será:

$$\delta_n P = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \delta\phi = R \cdot \sin \theta \cdot \delta\phi \quad (\text{III-138})$$

Como todos los puntos de la zapata giran el mismo ángulo " $\delta\phi$ " y tienen el mismo radio "R", resulta que el desplazamiento normal y por tanto la presión será proporcional al seno del ángulo del punto considerado respecto de la articulación "A".

La presión máxima se dará en el punto donde el seno del ángulo sea máximo, por tanto, si la zapata tiene menos de 90° la presión máxima se dará en el extremo libre y si la zapata tiene más de 90° entonces la presión máxima se dará a 90° .

La presión en un punto cualquiera de la zapata en función de la presión máxima se podrá expresar:

$$p = \frac{p_{\text{máx}} \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \quad (\text{III-139})$$

El estudio estático de la zapata se realizará tomando momentos respecto del punto "A" de las fuerzas representadas en la figura (III-31).

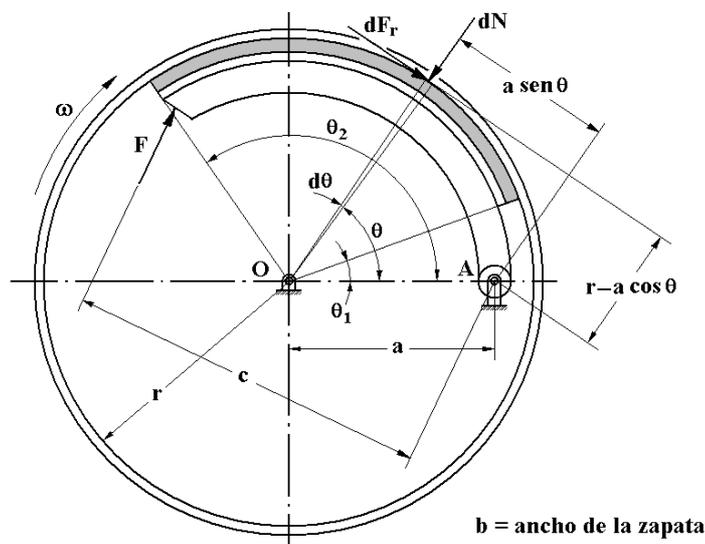


Fig. III-31 Fuerzas y momentos en la zapata

Sobre un diferencial de zapata actuará una fuerza diferencial normal "dN" cuyo valor será:

$$dN = p \cdot dA = p \cdot b \cdot r \cdot d\theta = \frac{p_{\text{máx}} \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot b \cdot r \cdot d\theta \quad (\text{III-140})$$

El diferencial de fuerza normal producirá un diferencial de fuerza de rozamiento "dF_r" cuyo valor será:

$$dF_r = \mu \cdot dN = \mu \cdot \frac{p_{\text{máx}} \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot b \cdot r \cdot d\theta \quad (\text{III-141})$$

El momento de las fuerzas normales respecto del punto "A" será:

$$\begin{aligned} M_N &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} a \cdot \text{sen } \theta \cdot dN = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a \cdot \text{sen } \theta \cdot \frac{p_{\text{máx}} \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot b \cdot r \cdot d\theta = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot r \cdot p_{\text{máx}}}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen}^2 \theta \cdot d\theta = \frac{a \cdot b \cdot r \cdot p_{\text{máx}}}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \text{sen } 2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned} \quad (\text{III-142})$$

El momento de las fuerzas de rozamiento respecto del punto "A" será:

$$\begin{aligned} M_\mu &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r - a \cdot \cos \theta) \cdot dF_r = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r - a \cdot \cos \theta) \cdot \mu \cdot \frac{p_{\text{máx}} \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot b \cdot r \cdot d\theta = \\ &= \frac{\mu \cdot b \cdot r \cdot p_{\text{máx}}}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen } \theta \cdot (r - a \cdot \cos \theta) d\theta = \\ &= \frac{\mu \cdot b \cdot r^2 \cdot p_{\text{máx}}}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen } \theta \cdot d\theta - \frac{\mu \cdot a \cdot b \cdot r \cdot p_{\text{máx}}}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen } \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \\ &= \frac{\mu \cdot b \cdot r^2 \cdot p_{\text{máx}}}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot [\cos \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} - \frac{\mu \cdot a \cdot b \cdot r \cdot p_{\text{máx}}}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot \left[\frac{1}{2} \text{sen}^2 \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned} \quad (\text{III-143})$$

Planteando el equilibrio de momentos respecto del punto "A" se tendrá:

$$F \cdot c - M_N + M_\mu = 0 \quad (\text{III-144})$$

Y despejando la fuerza "F" aplicada sobre la zapata para conseguir el frenado del tambor se tendrá:

$$F = \frac{M_N - M_\mu}{c} \quad (\text{III-145})$$

Con el sentido de giro del tambor representado en la figura (III-31) se observa que las fuerzas de rozamiento hacen disminuir el valor de la fuerza "F" a aplicar sobre la zapata, por lo que se tiene un efecto energizante:

Si el tambor girase en sentido contrario se tendría un valor de la fuerza aplicar a la zapata:

$$F = \frac{M_N + M_\mu}{c} \quad (\text{III-146})$$

En este caso en la zapata se debe aplicar una fuerza mayor, produciéndose un efecto antienergizante.

Cuando se tiene una zapata con efecto energizante, se debe comprobar que no se produzca el autobloqueo del tambor que se puede producir cuando el momento de las fuerzas de rozamiento es igual o mayor que el momento de las fuerzas normales.

Con las ecuaciones (III-142), (III-143), (III-145) y (III-146) se puede plantear la relación entre la fuerza aplicada a la zapata y la presión máxima obtenida en dicha zapata.

El par de frenado o transmitido por la zapata al tambor será:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \cdot dF_r = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \cdot \mu \cdot \frac{p_{\text{máx}} \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot b \cdot r \cdot d\theta = \\ &= \frac{\mu \cdot p_{\text{máx}} \cdot r^2 \cdot b}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen } \theta \cdot d\theta = \frac{\mu \cdot p_{\text{máx}} \cdot r^2 \cdot b}{\text{sen}_{\text{máx}} \theta} \cdot [\cos \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned} \quad (\text{III-147})$$

CAPÍTULO IV - SÍNTESIS DE TRANSMISIONES

IV.1 - TRANSMISIONES ENTRE EJES ALINEADOS

Existen muchos mecanismos o elementos de transmisión de movimiento entre ejes alineados. Éstos pueden ser elementos de unión rígidos o flexibles.

IV.1.1 - Elementos de unión rígidos

Los elementos rígidos de unión hacen que los dos ejes unidos se comporten como si fuese uno solo. Estos elementos no admiten desalineación ni descentramiento de los ejes a unir, salvo que los ejes sean suficientemente largos para absorber las deformaciones sin que aparezcan grandes tensiones.

Un elemento muy común de unión rígida de ejes es el manguito representado en la figura (IV-1).

El manguito abraza a los ejes a unir y puede transmitir el movimiento por la fricción que aparece por la presión. Si se desea mayor seguridad, se pueden añadir chavetas.

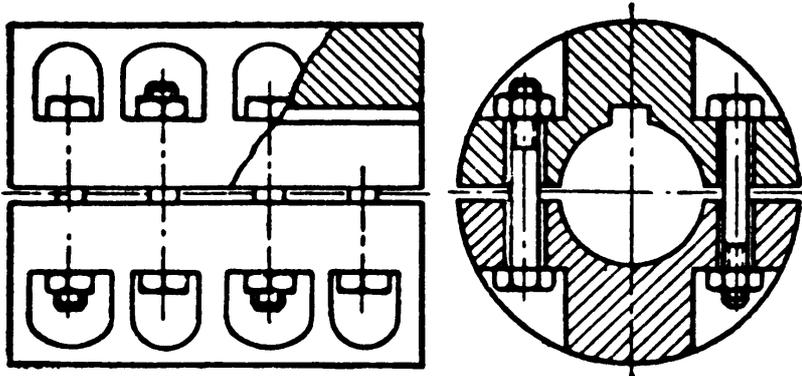


Fig. IV-1. Manguito de unión de ejes.

Otro elemento utilizado en la unión rígida de ejes son los platos de acoplamiento. Se monta un plato en cada extremo de los ejes a unir y se unen los dos platos rigidamente por medio de tornillos tal como se observa en la figura (IV-2).

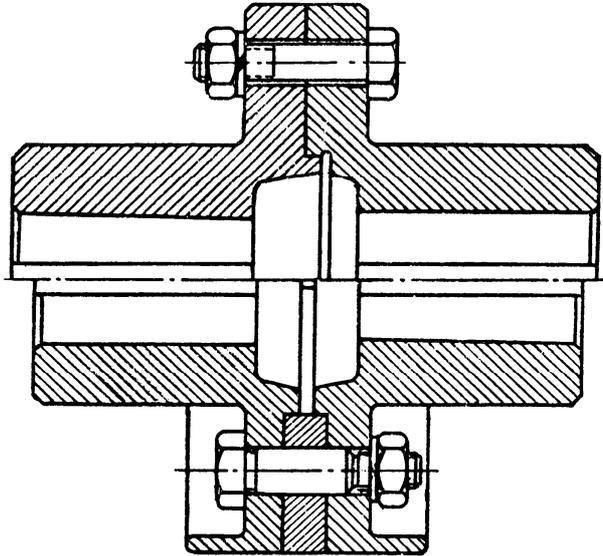


Fig. IV-2. Plato de acoplamiento rígido

IV.1.2 - Elementos de unión flexibles

Los elementos de unión flexible permiten una pequeña desalineación o descentramiento de los ejes a unir que teóricamente están alineados. La desalineación o el descentramiento admisibles dependen del tipo de elemento de unión utilizado. Entre estos elementos se encuentran los siguientes:

- Junta Oldham (Fig. IV-3), formada por dos platos con salientes unidos por medio de un disco con dos ranuras en cruz en las que encajan los salientes de los platos. También pueden tener los platos ranuras y la cruz salientes.



Fig. IV-3. Junta Oldham

- Platos de acoplamiento flexibles como los mostrados en las figuras (IV-4, IV-5, IV-6, IV-7, IV-8, IV-9 y IV-10).

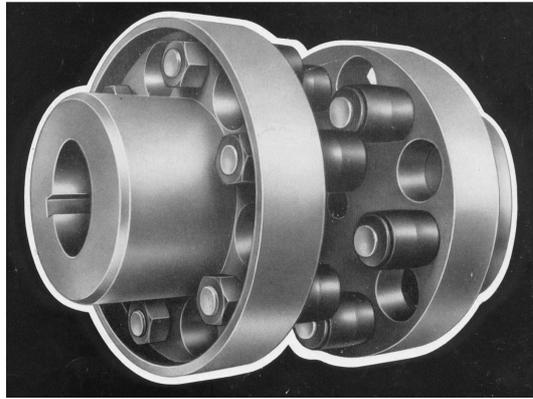


Fig. IV-4. Plato de acoplamiento flexible con pivotes de caucho

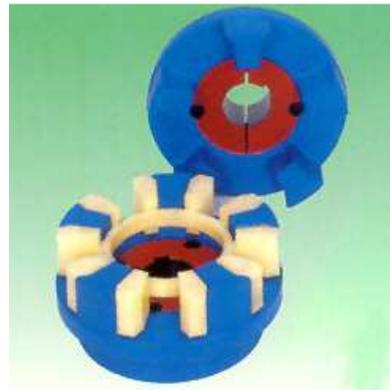


Fig. IV-5. Plato de acoplamiento flexible con estrella de nylon



Fig. IV-6. Plato de acoplamiento flexible con estrella de nylon en sectores y anillo



Fig. IV-7. Plato de acoplamiento flexible con estrella de nylon estriada interior

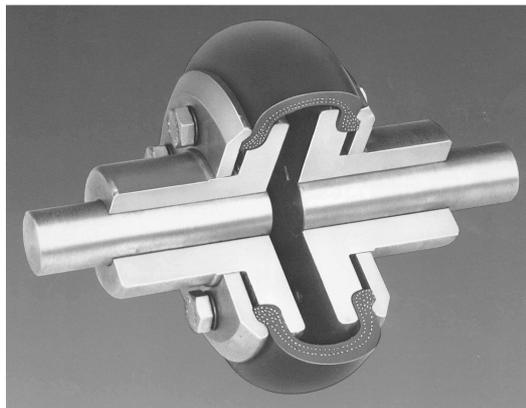


Fig. IV-8. Plato de acoplamiento flexible con pieza de unión de caucho reforzado



Fig. IV-9. Plato de acoplamiento flexible con piñones dentados y cadena

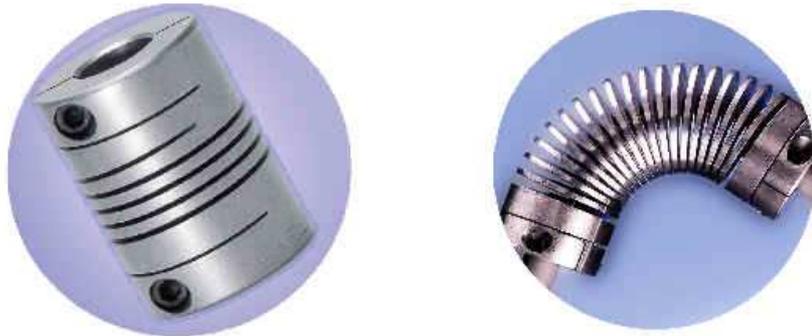


Fig. IV-10. Plato de acoplamiento flexible en hélice

- Otros elementos de unión de ejes alineados pueden ser los embragues estudiados en el capítulo de elementos de fricción.

IV.2 - TRANSMISIONES ENTRE EJES QUE SE CORTAN FORMANDO UN ÁNGULO

Para transmitir el movimiento entre ejes que se cortan se pueden utilizar los siguientes mecanismos:

- Poleas de fricción cónicas.
- Engranajes cónicos.
- Juntas universales o cardan (Fig. IV-11).

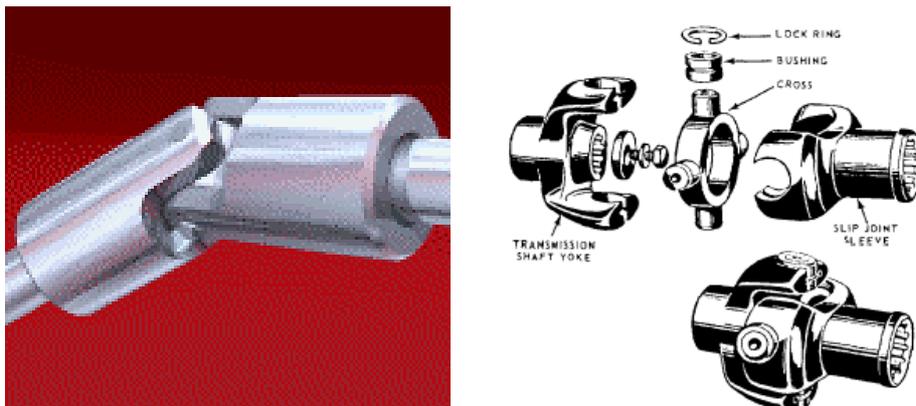


Fig. IV-11. Junta universal o cardan

Las juntas universales o cardan pueden transmitir el movimiento entre ejes que se cortan formando un ángulo que puede variar durante el funcionamiento.

En estas juntas, salvo que los ejes estén alineados, si la velocidad angular del eje de entrada es constante, el eje de salida tiene una velocidad angular variable. Esta variación de velocidad angular genera pares de inercia variables inaceptables en máquinas de precisión. Para solucionar este problema se utilizan juntas cardan por parejas (Fig. IV-12), haciendo que las horquillas del eje intermedio estén contenidas en el mismo plano y que el ángulo entre el eje de entrada y el intermedio sea igual que el ángulo entre el eje intermedio y el de salida.

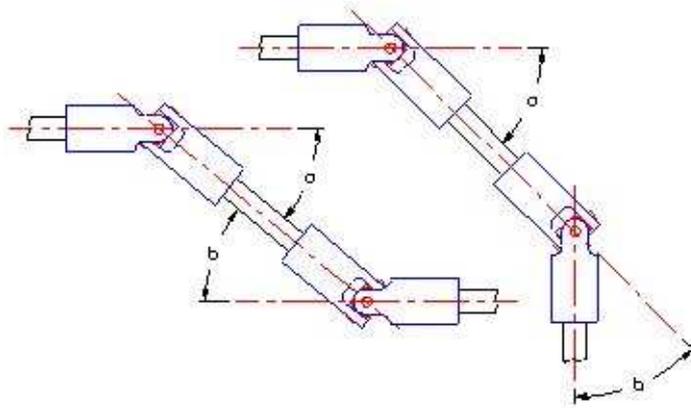


Fig. IV-12. Junta cardan doble

- Juntas homocinéticas (Fig. IV-13), son parecidas a las cardan, pero en lugar de unir las horquillas de los ejes por medio de una cruceta llevan

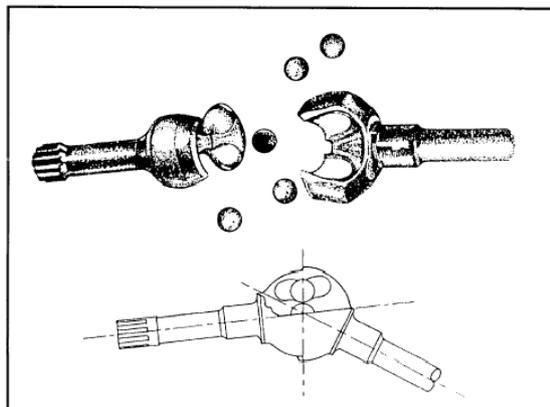


Fig. IV-13. Junta homocinética

unas bolas introducidas en una jaula con un sistema que las posiciona en un plano bisector a los planos perpendiculares a los ejes de entrada y salida. De este modo, si la velocidad angular del eje de entrada es constante, también la será la del eje de salida.

IV.3 - TRANSMISIONES ENTRE EJES PARALELOS RELATIVAMENTE PRÓXIMOS

La transmisión de movimiento entre ejes relativamente próximos se puede hacer por medio de:

- Poleas de fricción, (relación de transmisión aproximada).
- Engranajes cilíndricos, (relación de transmisión exacta).

IV.4 - TRANSMISIONES ENTRE EJES PARALELOS RELATIVAMENTE ALEJADOS

La transmisión de movimiento entre ejes relativamente alejados se puede hacer por medio de:

- Correas planas o trapeciales, (relación de transmisión aproximada).
- Correas dentadas (Fig. IV-14) o cadenas (Fig. IV-15 y IV-16), (relación de transmisión exacta).



Fig. IV-14. Correas y poleas dentadas

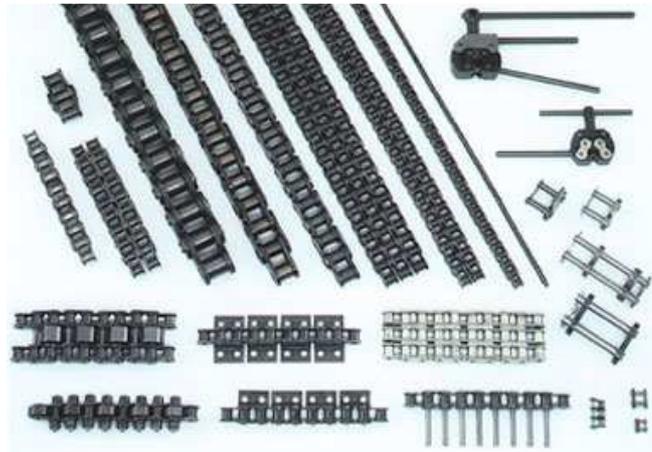


Fig. IV-15. Cadenas



Fig. IV-16. Cadenas y piñones

En las correas dentadas y en las cadenas la potencia se transmite por la acción de los dientes entre las poleas y la correa o entre los dientes de los piñones y los bulones de la cadena.

Normalmente la rama de la correa o cadena que no transmite potencia está destensada y la tensión de la otra rama es:

$$T = \frac{\text{Potencia}}{\text{Velocidad}} \quad (\text{IV-1})$$

Y el par en los ejes de las poleas dentadas o piñones es:

$$M = T \cdot R \quad (\text{IV-2})$$

CAPÍTULO V - SÍNTESIS DE MECANISMOS DE GIRO INTERMITENTE

Mecanismos de giro intermitente son aquellos que transforman el movimiento giratorio continuo del eje de entrada en un movimiento giratorio discontinuo en el eje de salida.

Entre estos mecanismos podemos citar: Las unidades de giro intermitente, la cruz de Malta, los engranajes de linterna y los trinquetes.

V.1 - UNIDADES DE GIRO INTERMITENTE

Las unidades de giro intermitente (Fig. V-1) tienen una apariencia parecida a los reductores de velocidad de tornillo sinfín y corona, pero en lugar del tornillo sinfín se usa una leva de tambor que tiene una zona con excentricidad y otra sin excentricidad y en lugar de la corona se utiliza una torreta con varios rodamientos en la periferia que encajan en el interior de la ranura de la leva de tambor.



Mecanismo giratorio intermitente: U.G.I.

Fig. V-1. Unidad de giro intermitente.

Cuando un rodamiento de la torreta está encajado en la zona excéntrica de la leva, la torreta gira y cuando está encajado en la zona sin excentricidad, la torreta permanece inmóvil.

Por cada vuelta de la leva la torreta gira el ángulo correspondiente a la separación entre rodamientos contiguos.

La leva está diseñada de tal forma que el giro de la torreta sigue una función determinada, por ejemplo cicloidal, con el fin de que no aparezcan aceleraciones angulares elevadas.

V.2 - CRUZ DE MALTA

La cruz de Malta o rueda de Ginebra (Fig. V-2) esta formada por una manivela con movimiento giratorio continuo que lleva acoplado un rodillo que se introduce en las ranuras de la rueda de salida.

Cuando el rodillo de la manivela está en el interior de la ranura, el eslabón de salida gira y cuando el rodillo está en exterior de la ranura, el eslabón de salida permanece inmóvil al ser impedido su movimiento por el sector circular que ajusta en los rebajes de la rueda de salida.

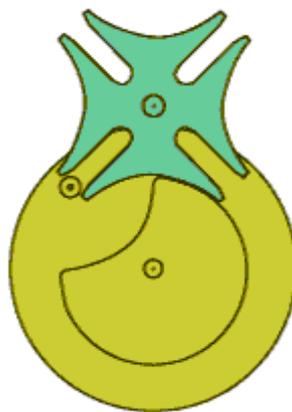


Fig. V-2. Cruz de Malta.

Con este mecanismo se consigue que la rueda de salida arranque y se detenga con velocidad progresiva evitando aceleraciones angulares elevadas.

Este mecanismo se utiliza en los proyectores de películas para detener la cinta en el momento de ser iluminado cada fotograma, desplazando los fotogramas cuando el haz de luz es interrumpido.

V.3 - ENGRANAJES DE LINTERNA

En los engranajes de linterna (Fig. V-3), en una de las ruedas los dientes son cilindros fijados sobre un disco y en la otra rueda son parecidos a los dientes de los piñones de cadena.

Estos engranajes, si están bien diseñados, cumplen la ley de engrane y por lo tanto se pueden utilizar a velocidades angulares relativamente altas.

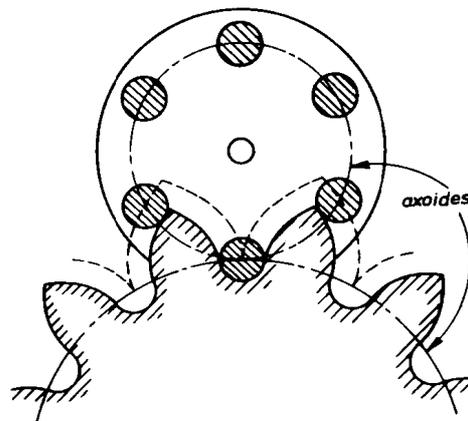


Fig. V-3. Engranajes de linterna.

Si se eliminan parte de los cilindros de una rueda (Fig. V-4), se convierte en un mecanismo de giro intermitente.

Estos mecanismos deben funcionar a velocidades angulares bajas, ya que se producen choques del cilindro sobre los dientes.

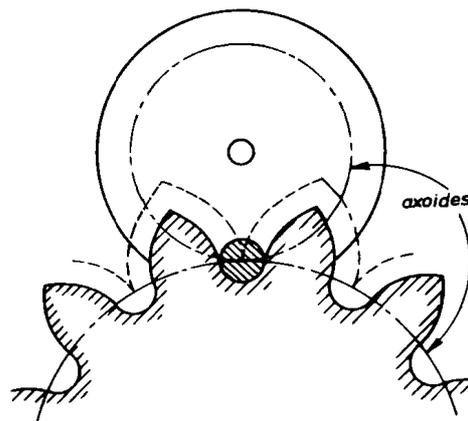


Fig. V-4. Engranaje de linterna utilizado como mecanismo de giro intermitente.

V.4 - MECANISMOS DE TRINQUETE

Los mecanismos de trinquete utilizados como mecanismo de giro intermitente (Fig. V-5) se basan en el cuadrilátero articulado. Se introduce un movimiento giratorio continuo por la manivela y sobre el eslabón oscilador está montado el trinquete que en un sentido de giro arrastra a la rueda dentada de salida y en el otro sentido resbala sobre los dientes.

El número de dientes arrastrado en cada oscilación depende de la longitud de la manivela que normalmente suele ser regulable.

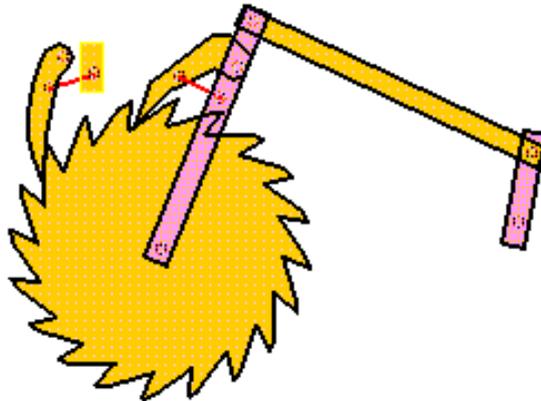


Fig. V-5. Mecanismo de trinquete.

En algunos mecanismo de trinquete (Fig. V-6) se suele utilizar un trinquete o pestillo reversible consiguiéndose de este modo que se pueda elegir el sentido del movimiento de salida de la rueda con girar 180° el pestillo.

Si se gira 90°, el pestillo queda en una posición que no alcanza a los dientes de la rueda, quedando el mecanismo fuera de funcionamiento.

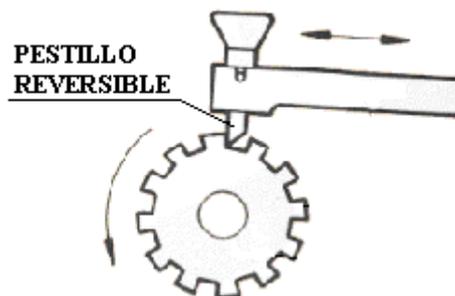


Fig. V-6. Mecanismo de trinquete con pestillo reversible.

También existen mecanismos de trinquete que actúan por fricción (Fig. V-7). En este caso, la rueda dentada se sustituye por una polea cilíndrica y en lugar de pestillo se utiliza una zapata autoblocante. En un sentido de giro, debido al efecto autoenergizante, la zapata se autobloquea contra la polea y la arrastra y en el otro sentido, debido al efecto antienergizante, la zapata se desbloquea y no arrastra a la polea.

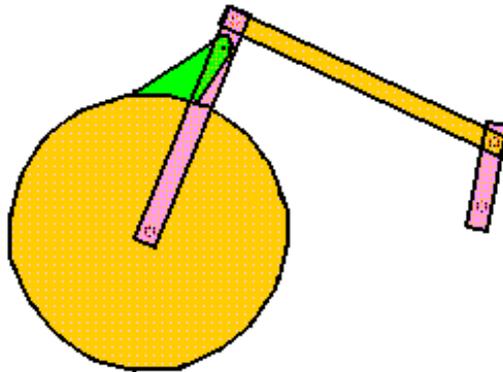


Fig. V-7. Mecanismo de trinquete por zapata autoblocante.

CAPÍTULO VI - SÍNTESIS DE MECANISMOS

Por el título de este capítulo y el nombre de la asignatura, parecería lógico que se hubiese empezado la asignatura por este capítulo, si no se ha hecho así es debido a que para poder sintetizar un determinado mecanismo para desarrollar un trabajo, es necesario tener conocimiento de varios mecanismos y precisamente esto es lo que se ha pretendido con los capítulos precedentes.

Un mecanismo se puede definir como un conjunto de elementos rígidos (eslabones) ensamblados entre ellos por medio de uniones que les permiten unos determinados movimientos relativos (pares) y cuyo objetivo es la transformación del movimiento.

Teniendo en cuenta la transformación del movimiento deseada, la síntesis de un mecanismo consiste en la elección de los eslabones y los pares de unión entre ellos para que el conjunto realice el trabajo previsto.

VI.1 - TIPOS DE SÍNTESIS

La síntesis de mecanismos se puede subdividir y clasificar en muchos apartados según el criterio utilizado para su clasificación. No obstante la mayoría de autores están de acuerdo en realizar inicialmente la clasificación siguiente:

- Síntesis de tipo.
- Síntesis de número.
- Síntesis dimensional.

A la unión de las dos primeras, es decir al conjunto de las síntesis de tipo y de número también se le llama síntesis estructural o elección del tipo de mecanismo.

VI.1.1 - Síntesis de tipo

La síntesis de tipo consiste en la elección del tipo de eslabones que van a componer el mecanismo. Por ejemplo elegir si el mecanismo va estar compuesto por palancas, levas, engranajes, correas, etc. o por una determinada combinación de los elementos anteriores.

VI.1.2 - Síntesis de número

Una vez realizada la síntesis de tipo, la síntesis de número trata de la elección del número de los elementos elegidos anteriormente y del número de pares de unión entre ellos que van a formar parte del mecanismo.

VI.1.3 - Síntesis dimensional

Una vez realizadas las síntesis de tipo y de número, la síntesis dimensional trata de determinar las dimensiones de los diferentes elementos que componen el mecanismo para que éste realice el trabajo previsto.

VI.1.4 - Síntesis estructural

Una vez realizadas las síntesis de tipo y de número quiere decir que ya está determinado el tipo de mecanismo que se va a utilizar, por ejemplo si se trata de un mecanismo de pistón-biela-manivela, o un mecanismo de leva y seguidor, etc. Por este motivo al conjunto de las síntesis de tipo y de número se le denomina como síntesis estructural o elección del tipo de mecanismo.

Normalmente al realizar la síntesis de un mecanismo se entremezclan la síntesis de tipo y de número y realmente lo que se hace es directamente una síntesis estructural. En la mayoría de los casos de síntesis no se inventa un mecanismo nuevo, sino que se utiliza uno ya existente, por esta razón la síntesis estructural realmente es la elección del tipo mecanismo a utilizar.

VI.2 - OTROS TIPOS DE SÍNTESIS

Una clasificación de tipos de síntesis muy utilizados sobre todo en mecanismos articulados es la siguiente:

- Síntesis de generación de funciones, con este tipo de síntesis se pretende conseguir unos mecanismos en los que el movimiento del eslabón de salida sea una determinada función del movimiento del eslabón de entrada.

- Síntesis de generación de trayectorias, con este tipo de síntesis se pretende lograr que un determinado punto del mecanismo describa una trayectoria determinada.

- Síntesis de puntos de precisión, aquí se pretende que un determinado punto del mecanismo alcance una serie de posiciones prefijadas.

- Síntesis de guiado de cuerpo rígido, se pretende que un determinado eslabón del mecanismo realice un movimiento prefijado.

Los tipos de síntesis mencionados en los apartados anteriores tuvieron gran auge en el siglo XIX y principios del XX. Se diseñaron mecanismos que realizaban toda clase de operaciones matemáticas y dibujaban gran número de figuras geométricas, etc. En la actualidad, muchos han caído en desuso debido al control de movimientos logrado por pequeños ordenadores.

VI.3 - EJEMPLOS DE SÍNTESIS ESTRUCTURAL

Para iniciar la síntesis de un mecanismo se debe analizar el movimiento que se pretende lograr. Para conseguir este movimiento se deben analizar todos los mecanismos que sean capaces de cumplirlo y elegir el que mejor se ajuste al trabajo a realizar. A continuación se presentan dos ejemplos de movimientos muy característicos en automatismos.

Por ejemplo, si se desea obtener un movimiento rectilíneo alternativo, se podrían utilizar los mecanismos siguientes:

- Un cilindro neumático.
- Un cilindro hidráulico.
- Una cadena entre dos piñones dentados.
- Una leva con seguidor de movimiento rectilíneo.
- Un husillo roscado.
- Un mecanismo de pistón-biela-manivela.
- etc.

La síntesis estructural consistiría en escoger, por ejemplo, el mecanismo de pistón-biela-manivela por determinadas razones.

A partir de este momento se aplicaría la síntesis dimensional para conseguir la carrera deseada, etc.

Otro ejemplo podría ser el diseño de un mecanismo que realice un movimiento giratorio alternativo, en este caso se podrían utilizar los mecanismos siguientes:

- Un reductor de velocidad.
- Una plataforma giratoria movida por medio de una cadena o una correa.
- Una leva con seguidor de movimiento giratorio alternativo.
- Un mecanismo de manivela-oscilador.
- etc.

En este caso, por ejemplo, se escoge el mecanismo de manivela-oscilador.

Del mismo modo que en el otro ejemplo, ahora se deberá dimensionar el mecanismo para que el movimiento alternativo conseguido coincida con el deseado.

VI.4 - DIRECCIÓN ACKERMANN

Para que las ruedas de un vehículo no deslicen cuando éste circula por una curva, se debe cumplir que los ejes de las ruedas delanteras se corten en un punto del eje de las ruedas traseras (Fig. VI-1). Este punto es el centro instantáneo de rotación.

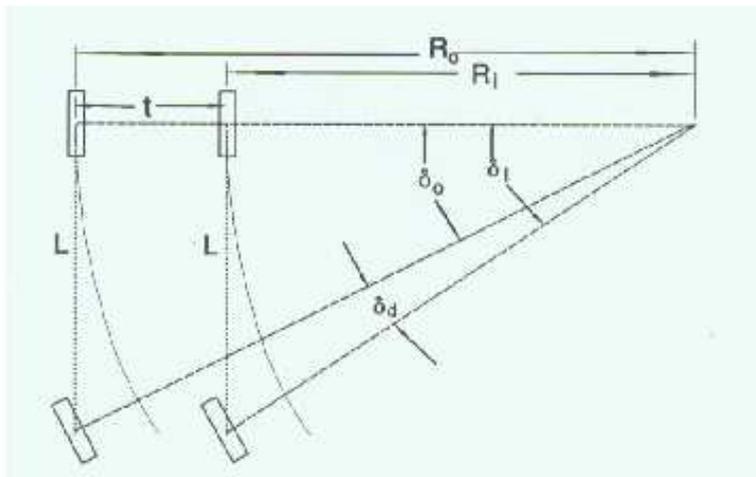


Fig. VI-1. Centro instantáneo de rotación del vehículo.

Para conseguir una inclinación diferente de cada rueda delantera se utiliza la dirección Ackermann.

La dirección Ackermann se basa en un cuadrilátero articulado, precisamente en un trapecio articulado (Fig. VI-2).

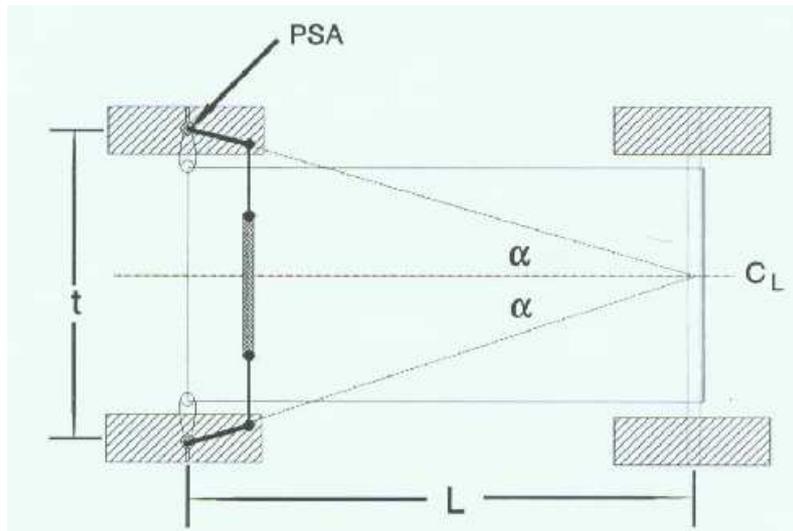


Fig. VI-2. Dirección Ackermann.

En la figura VI-3, donde se han tomado unas dimensiones arbitrarias, se aprecia la diferente inclinación de las ruedas solidarias a los eslabones cortos del trapecio articulado.

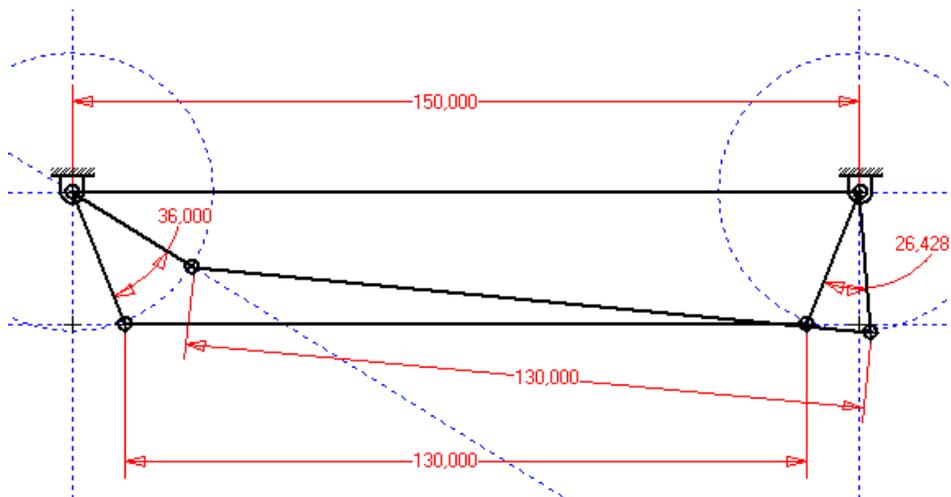


Fig. VI-3. Fundamento de la dirección Ackermann.

VI.5 - SUSPENSIÓN MACPHERSON

La suspensión MacPherson (Fig. VI-4 y VI-5) está formada por cuatro eslabones unidos por tres pares giratorios y un par prismático. El par prismático está formado por el amortiguador y el muelle. El eje de la rueda es solidario a la parte inferior del amortiguador.

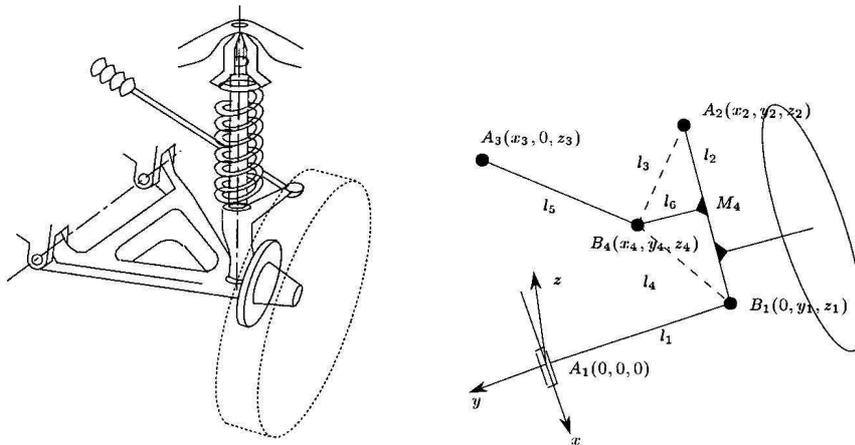


Fig. VI-4. Suspensión MacPherson delantera.

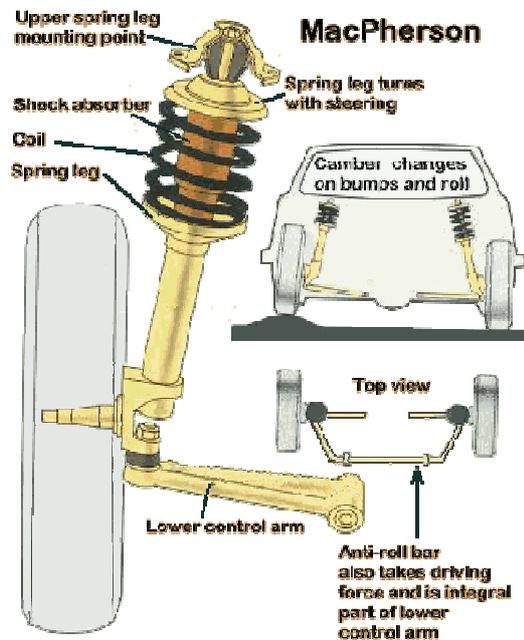


Fig. VI-4. Suspensión MacPherson sin brazo de dirección.

CAPÍTULO VII - DINÁMICA DE MÁQUINAS

En este capítulo se estudiarán el volante, el efecto giroscópico y como curiosidad, ya que forma parte del escudo de los Ingenieros Industriales, el regulador de Watt.

VII.1 - VOLANTE

El volante (Fig. VII-1) es un dispositivo que se introduce solidario a un eje de máquina y cuyo objetivo es reducir las variaciones de la velocidad angular del eje sobre el que está montado.

También se puede considerar como un almacén de energía cinética de rotación. Absorbe energía aumentando su velocidad angular y la devuelve cuando disminuye dicha velocidad.

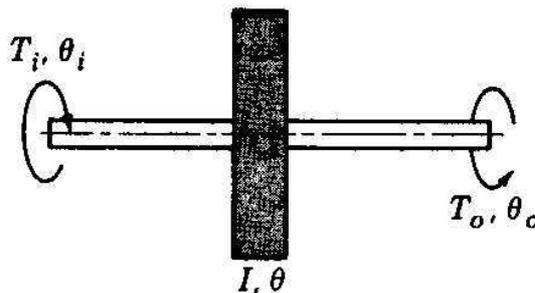


Fig. VII-1. Volante.

La ecuación aplicable al volante es:

$$I \cdot \alpha = T_i - T_o \quad (\text{VII-1})$$

Donde "I" es el momento de inercia del volante, " α " La aceleración angular del eje, " T_i " es el par de entrada o motor y " T_o " es el par de salida o resistente.

De la ecuación (VII-1) se desprende que si el par de entrada y de salida son constantes o siempre coinciden los dos en valor, no es necesario el volante.

El volante será necesario, por ejemplo, si el par de entrada es constante y el de salida variable y viceversa o si los dos pares varían de forma diferente.

De la ecuación (VII-1) también se desprende que para una determinada diferencia entre los pares de entrada y salida, el valor de la aceleración angular será tanto menor cuanto mayor sea el momento de inercia del volante. Por tanto, cuanto mayor sea el momento de inercia del volante menor será la variación de la velocidad angular del eje sobre el que está colocado.

Para simplificar el cálculo del volante se suponen unos pares de entrada y salida constantes (Fig. VII-2).

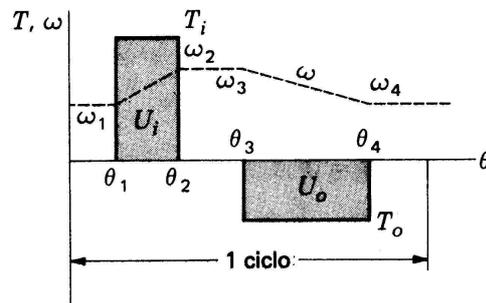


Fig. VII-2. Pares de entrada y resistente y velocidades angulares.

El ciclo, que se repite con cada revolución del volante, se inicia con una velocidad angular constante “ ω_1 ” hasta el ángulo de giro “ θ_1 ”. A partir de este ángulo se le aplica al eje un par de entrada constante “ T_i ” hasta el ángulo “ θ_2 ”, el par de entrada hará que el eje se acelere y alcance una velocidad angular “ ω_2 ” que se mantendrá constante hasta el ángulo “ θ_3 ”. A partir de este ángulo se le aplica al eje el par resistente constante “ T_o ” hasta el ángulo “ θ_4 ”, el par resistente hará que la velocidad angular disminuya hasta el valor “ ω_4 ”.

La energía suministrada al volante por el par de entrada será:

$$U_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T_i d\theta = T_i (\theta_2 - \theta_1) \quad (\text{VII-2})$$

Y la energía absorbida del volante por el par resistente será:

$$U_o = \int_{\theta_3}^{\theta_4} T_o d\theta = T_o (\theta_4 - \theta_3) \quad (\text{VII-3})$$

- Si $U_i = U_o$, se cumplirá que $\omega_4 = \omega_1$, la velocidad media se mantiene.
- Si $U_i > U_o$, se cumplirá que $\omega_4 > \omega_1$, el eje se acelera.
- Si $U_i < U_o$, se cumplirá que $\omega_4 < \omega_1$, el eje se frena.

Lo normal es que la energía suministrada al volante durante un ciclo sea igual a la absorbida con lo que el ciclo se repite y la velocidad media se mantiene constante.

Las energías cinéticas del volante serán:

- Al inicio del ciclo

$$E_1 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_1^2 \quad (\text{VII-4})$$

- Después de aplicado el par de entrada

$$E_2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_2^2 = E_3 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_3^2 \quad (\text{VII-5})$$

- Al final del ciclo

$$E_4 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_4^2 \quad (\text{VII-6})$$

La energía suministrada al volante por el par de entrada será igual a la diferencia de energías cinéticas antes y después de aplicar el par de entrada.

$$U_i = E_2 - E_1 \quad (\text{VII-7})$$

La energía absorbida del volante por el par resistente será igual a la diferencia de energías cinéticas antes y después de aplicar el par resistente.

$$U_o = E_4 - E_3 \quad (\text{VII-8})$$

Dada una determinada máquina, lo normal es que se conozcan los pares de entrada y resistente, por lo tanto se pueden determinar las energías absorbida y cedida por el volante.

$$U_i = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{1}{2} I (\omega_2 + \omega_1) \cdot (\omega_2 - \omega_1) \quad (\text{VII-9})$$

Si se considera que la velocidad angular media es $\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$

Y se define el coeficiente de regularidad de la velocidad $C_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega}$,
suponiendo que la velocidad media se mantiene, resulta:

$$U_i = U_o = C_s \cdot I \cdot \omega^2 \quad (\text{VII-10})$$

El coeficiente de regularidad suele estar tabulado en función del tipo de máquina de diseñar, con lo que dados unos determinados pares de entrada y resistente y una determinada velocidad angular del eje, solo falta determinar el momento de inercia que debe tener el volante para que se cumpla el coeficiente de regularidad de velocidad deseado.

VII.2 - GIRÓSCOPO

El giróscopo o giroscopio (Fig. VII-3) consiste en un rotor girando, montado a través de unos balancines articulados sobre una base de forma que no se puede introducir ningún par desde la base hasta el rotor.

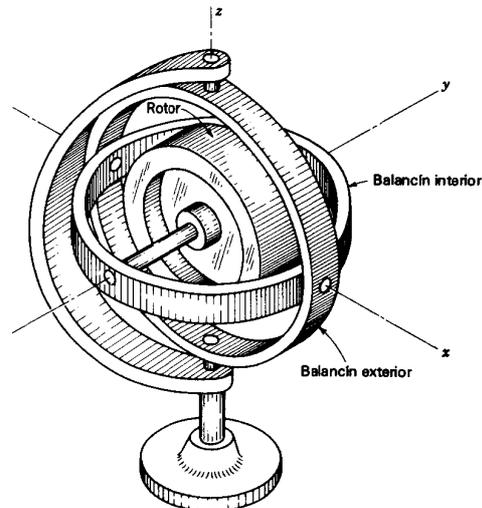


Fig. VII-3. Giróscopo o giroscopio.

Al tener el rotor un momento cinético debido al giro y no poderle introducir ningún par desde la base, el momento cinético se mantendrá constante, con lo que la dirección del eje del rotor no variará independientemente de las variaciones de dirección que sufra la base. Esta propiedad ha hecho que el giróscopo se utilice como brújula para navegación aérea y marítima.

VII.2.1 - Efecto giroscópico

En el diseño de máquinas apenas tiene utilidad el giróscopo, lo que realmente tiene importancia es el efecto giroscópico que aparece cuando en una máquina se obliga a variar la dirección del momento cinético de un rotor.

En la figura (VII-4) se representa un rotor montado sobre una plataforma giratoria donde aparecerá el efecto giroscópico.

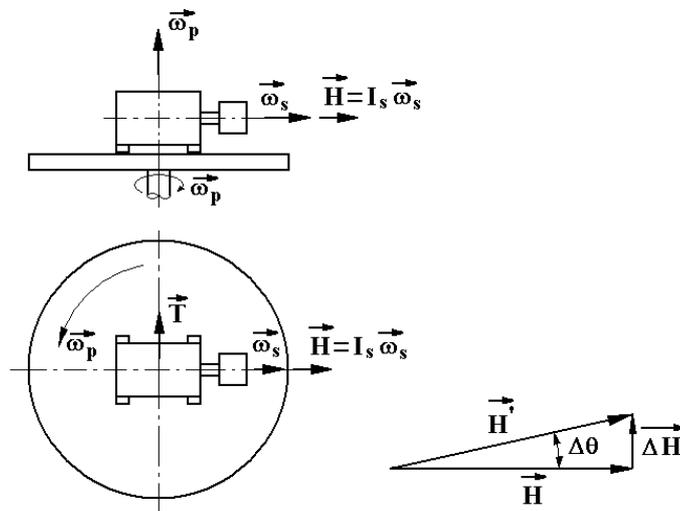


Fig. VII-4. Efecto giroscópico.

El rotor del motor, al girar con una velocidad angular “ ω_s ” posee un momento cinético “ H ”

$$\vec{H} = I_s \vec{\omega}_s \quad (\text{VII-11})$$

Al girar la plataforma, variará la dirección del momento cinético. Al cabo de un instante de tiempo “ Δt ” habrá girado un ángulo “ $\Delta \theta$ ”.

La variación del momento cinético será:

$$\Delta \vec{H} = \vec{H}' - \vec{H} \quad (\text{VII-12})$$

El módulo de la variación del momento cinético será:

$$\Delta H = H \cdot \Delta \theta = I_s \omega_s \Delta \theta \quad (\text{VII-13})$$

La variación del momento del momento cinético se debe al impulso angular causado por un par “T” aplicado durante un tiempo “ Δt ”.

El valor del par medio será:

$$\vec{T}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{H}}{\Delta t} \quad (\text{VII-14})$$

Y el valor instantáneo del módulo del par será:

$$T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I_s \cdot \omega_s \Delta \theta}{\Delta t} = I_s \omega_s \omega_p \quad (\text{VII-15})$$

Y vectorialmente, como el par debe tener la misma dirección de la variación del momento cinético, resultará:

$$\vec{T} = I_s \cdot \vec{\omega}_p \wedge \vec{\omega}_s \quad (\text{VII-16})$$

Este par debido al efecto giroscópico se lo deberán hacer los rodamientos al rotor por medio de unas fuerzas que se transmitirán a las patas del motor. Si el momento de inercia del rotor y las velocidades angulares de la plataforma y del rotor son elevados, harán que las fuerzas sean elevadas como para ser tenidas en cuenta.

VII.3 - REGULADOR DE WATT

El regulador de Watt es un mecanismo que se utilizó para regular la velocidad angular de las máquinas, sobre todo máquinas de vapor y turbinas hidráulicas, desde su invención a mediados del siglo XVIII hasta casi finales del siglo XX.

Su importancia fue tal que los Ingenieros Industriales lo incluyeron en su escudo en representación de la especialidad Mecánica.

Hoy en día, debido a la facilidad del control con dispositivos electrónicos, ha caído en desuso.

En la figura VII-5 se representa un regulador de Watt, con el resto de accesorios, para regular el chorro de agua de una turbina Pelton.

Su funcionamiento se basa en el equilibrio entre la fuerza centrífuga y el peso de unas bolas giratorias. Si aumenta la velocidad, la fuerza centrífuga aumenta y las bolas se elevan desplazando a un collarín que acciona sobre el sistema de regulación de la velocidad disminuyéndola. Si la velocidad angular disminuye las bolas descenden accionando sobre el sistema de regulación.

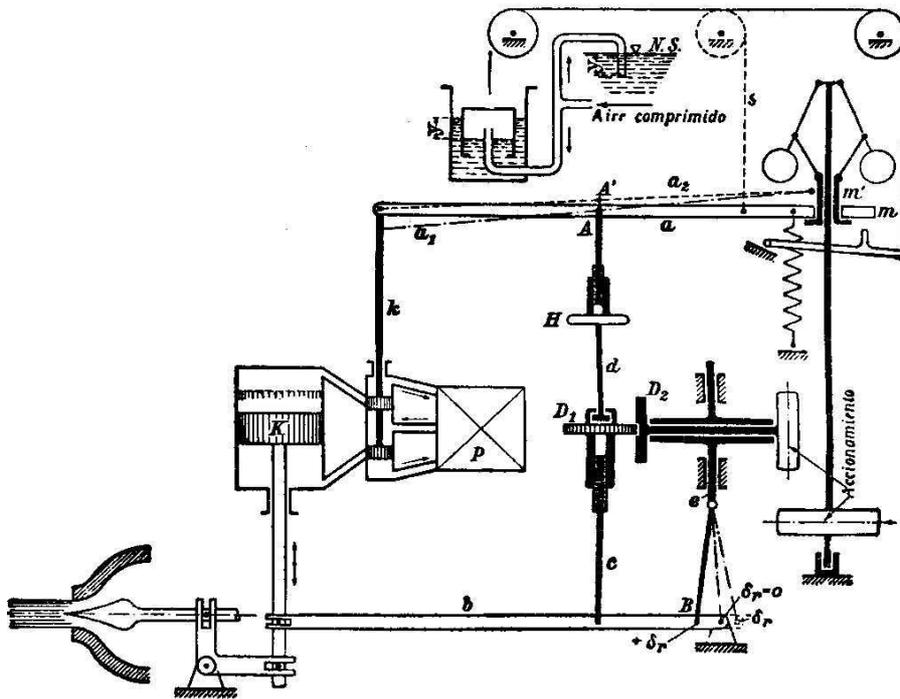


Fig. VII-5. Regulador de Watt y accesorios.

En la figura VII-6 se representa un sistema de regulación actual basado en componentes electrónicos.

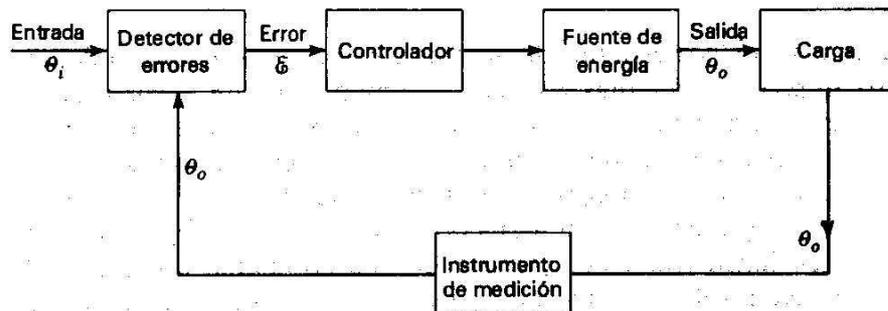


Fig. VII-6. Sistema de regulación actual.